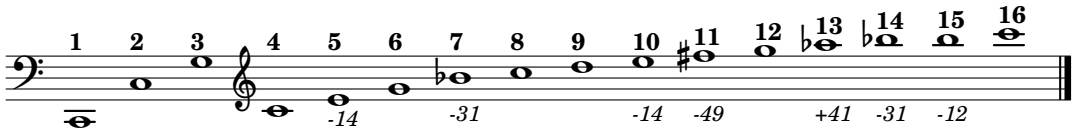
Les fréquences

De l'octave au comma



Gravure LilyPond, composition LaTeX.
Expériences à faire au synthétiseur de slashbin.net :
https://www.slashbin.net/musique/synth.php

Table des matières

1 Avant-propos **2**

2 Hauteur et fréquence **2**

3 L'octave **3**

4 La série des harmoniques **3**

5 Des rapports aux cents **4**

6 Le ton et le demi-ton **5**
6.1 Le ton : deux quintes moins une octave 5
6.2 Deux demi-tons qui ne sont pas égaux 5
6.3 Le ton majeur et le ton mineur 5

7 Le comma pythagoricien **6**

8 Le comma syntonique **6**

9 Tempérer **7**

10 Le tempérament égal **7**

11 Écouter avec le synthétiseur **8**

12 En résumé **10**

Colophon **10**

Avant-propos

Une note est une **fréquence**, un intervalle un **rapport** entre deux fréquences. Mesurées ainsi, douze quintes ne font pas tout à fait sept octaves — l'écart est le *comma* —, et le piano doit s'en accommoder. Ces notions débordent le programme de matières théoriques de l'École de musique Vincent-d'Indy, qui n'en retient que le diapason, au niveau 3.

Chaque idée se vérifie à l'oreille au synthétiseur de slashbin.net. Les encadrés à filet rouge proposent ces expériences ; la plupart sont réunies à la section 11, qui présente aussi les commandes du synthétiseur.

Conventions. Les notes sont nommées en français et les octaves numérotées à la française : le la du diapason est *la3*, que le synthétiseur, suivant la notation scientifique, appelle A4 (section 3). Les nombres décimaux s'écrivent avec une virgule.

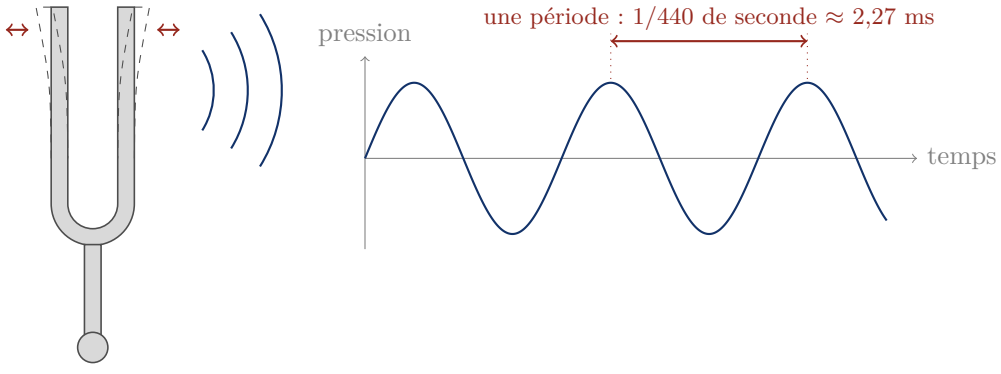
Hauteur et fréquence

Un son musical est une vibration de l'air qui se répète. Le nombre de répétitions par seconde est sa **fréquence**, mesurée en hertz ; plus elle est élevée, plus le son est *aigu*. L'oreille humaine entend à peu près de 20 Hz à 20 000 Hz ; un piano va du la le plus grave, 27,5 Hz, au do le plus aigu, environ 4186 Hz.

Le diapason. Pour jouer ensemble, les musiciens s'accordent sur une fréquence de référence. C'est aujourd'hui le la3 à **440 Hz**, fixé par une conférence internationale à Londres en 1939 puis par la norme ISO 16. Il n'en a pas toujours été ainsi : le « diapason normal » français de 1859 plaçait le la à 435 Hz, la musique baroque se joue souvent à 415 Hz, et bien des orchestres s'accordent aujourd'hui à 442 ou 443 Hz. Changer de diapason transpose tout, mais ne change aucun intervalle : ce qui compte, ce sont les *rapports* entre les notes.

Le mot désigne aussi l'instrument qui donne cette note : une fourche d'acier, inventée en 1711 par le trompettiste anglais John Shore. Frappées, ses deux branches vibrent en s'écartant et se rapprochant à une fréquence fixe, et produisent un son presque pur, pauvre en harmoniques — celui de l'onde Sinusoïdale du synthétiseur.

L'oreille entend des rapports. De la2 (220 Hz) à la3 (440 Hz), la fréquence gagne 220 Hz ; de la3 à la4 (880 Hz), elle en gagne 440. Pourtant l'oreille entend deux fois le même intervalle, une octave : dans les deux cas, la fréquence est *doublée*. Un intervalle ne se mesure donc pas par une différence de fréquences, mais par leur **rapport** — la note aiguë divisée par la grave. Toute la suite découle de cette remarque.



Le diapason. Ses deux branches vibrent ensemble, l'une contre l'autre, et poussent l'air 440 fois par seconde : la pression oscille selon une sinusoïde, que l'oreille entend comme le la3.

L'octave

L'**octave** est le rapport **2/1** : la note aiguë vibre exactement deux fois plus vite que la grave. C'est l'intervalle le plus consonant après l'unisson, au point que deux notes à l'octave portent le même nom. La raison tient aux harmoniques (section 4) : toutes les composantes du son aigu se retrouvent dans le son grave.

Monter de n octaves multiplie la fréquence par 2^n ; en descendre la divise par 2^n. Les do et les la du tableau suivent cette règle d'une ligne à l'autre.

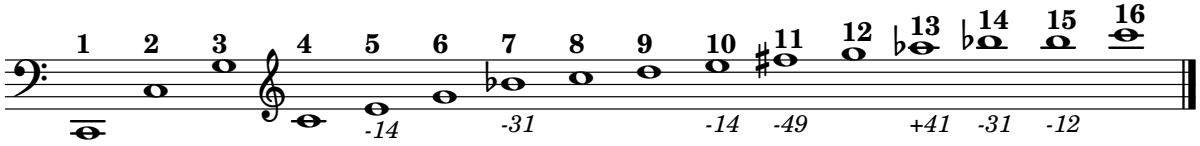
Octave	**Do**		**Hz**	**La**		**Hz**
	français	*intern.*		*français*	*intern.*	
0	do0	C1	32,70	la0	A1	55,00
1	do1	C2	65,41	la1	A2	110,00
2	do2	C3	130,81	la2	A3	220,00
3	do3	C4	261,63	la3	A4	440,00
4	do4	C5	523,25	la4	A5	880,00
5	do5	C6	1046,50	la5	A6	1760,00

Les do et les la de six octaves. Le numéro d'octave change au do : le la3 est au-dessus du do3.

Deux numérotations. La tradition française numérote les octaves un cran plus bas que la notation internationale, dite « scientifique ». Le même son s'écrit donc la3 ou A4, do3 ou C4 ; le la le plus grave du piano, 27,5 Hz, est le la−1 des solfèges français et le A0 international. Les solfèges français emploient la première, le synthétiseur la seconde. Il suffit d'ajouter un au numéro français pour passer à l'international. Les logiciels de musique ne s'accordent pas : la norme MIDI donne au do central le numéro 60 sans lui fixer de nom, et certains séquenceurs l'appellent C3, comme la numérotation française.

La série des harmoniques

Une corde de piano, une colonne d'air dans une flûte, ne vibrent pas à une seule fréquence. Elles vibrent à la fois à la *fréquence fondamentale* f, qui donne le nom de la note, et à ses multiples entiers $2f$, $3f$, $4f$, …, de plus en plus faiblement : ce sont les **harmoniques**. Leur dosage fait le *timbre* — ce qui distingue un la de violon d'un la de clarinette.



Les seize premières harmoniques de do1 (65,41 Hz). Sous la note, l'écart en cents à la note tempérée la plus proche, quand il atteint dix cents : la 7e harmonique est nettement plus basse que le si bémol du piano.

Lues dans l'ordre, les harmoniques dessinent les intervalles. Entre les harmoniques 1 et 2 : une octave, 2/1. Entre 2 et 3 : une quinte, 3/2. Entre 3 et 4 : une quarte, 4/3. Puis la tierce majeure 5/4, la tierce mineure 6/5, et au-delà des intervalles de plus en plus petits, jusqu'au ton (9/8, 10/9) et au demi-ton (16/15).

Rang	Hz	Note tempérée *la plus proche*	Écart *(cents)*	Depuis la précédente *rapport*	*cents*
1	65,41	do1	0,0		
2	130,81	do2	0,0	2	1200,0
3	196,22	sol2	+2,0	3/2	702,0
4	261,63	do3	0,0	4/3	498,0
5	327,03	mi3	−13,7	5/4	386,3
6	392,44	sol3	+2,0	6/5	315,6
7	457,84	si bémol3	−31,2	7/6	266,9
8	523,25	do4	0,0	8/7	231,2
9	588,66	ré4	+3,9	9/8	203,9
10	654,06	mi4	−13,7	10/9	182,4
11	719,47	fa dièse4	−48,7	11/10	165,0
12	784,88	sol4	+2,0	12/11	150,6
13	850,28	la bémol4	+40,5	13/12	138,6
14	915,69	si bémol4	−31,2	14/13	128,3
15	981,10	si4	−11,7	15/14	119,4
16	1046,50	do5	0,0	16/15	111,7

La série des harmoniques de do1, rapprochée des notes du piano. Le rapport entre deux harmoniques voisines, $k/(k-1)$, rapetisse à mesure qu'on monte.

C'est là que se fonde la *consonance* évoquée dans le guide des intervalles : deux notes sonnent d'autant plus reposées que leurs harmoniques coïncident souvent, c'est-à-dire que leur rapport est simple. À l'octave, toutes les harmoniques de la note aiguë sont aussi des harmoniques de la grave ; à la quinte 3/2, une sur deux ; à la tierce 5/4, une sur quatre. On appelle **justes** les intervalles qui ont exactement ces rapports simples.

Le timbre. Régler la fréquence à 110 Hz et passer de Sinusoïdale à Dent de scie, puis à Carrée. Le sinus est un son pur, sans harmoniques. La dent de scie les contient toutes ; le carré, seulement les impaires (3, 5, 7…), d'où son timbre creux, proche de la clarinette. L'oscilloscope du synthétiseur montre les trois formes d'onde.

Des rapports aux cents

Enchaîner deux intervalles multiplie leurs rapports. Une quinte (3/2) suivie d'une quarte (4/3) donne $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$: une octave. Une tierce majeure (5/4) suivie d'une tierce mineure (6/5) donne $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$: une quinte. C'est l'équivalent, pour les fréquences, de l'addition des demi-tons dans les guides des intervalles et des gammes.

Multiplier des fractions est peu commode. On convertit donc les rapports en une unité qui s'*additionne* : le **cent**. L'octave vaut 1200 cents, et un rapport r en vaut

$$c = 1200 \times \log_2 r.$$

Le logarithme change les multiplications en additions : quinte et quarte font 701,96 + 498,04 = 1200 cents. Le demi-ton du piano, qui partage l'octave en douze, vaut exactement 100 cents — d'où le nom.

Ordres de grandeur. Autour du la3, un cent vaut environ 0,25 Hz. Une oreille exercée distingue deux notes jouées l'une après l'autre à partir de quelques cents d'écart ; jouées ensemble, des écarts bien plus petits s'entendent, par les battements qu'ils produisent (section 11).

Le tableau compare chaque intervalle du piano à son modèle juste. L'octave est identique ; la quinte et la quarte s'en écartent d'à peine deux cents ; les tierces et les sixtes, de quatorze à seize.

		Tempéré		Juste		Écart	Sur la 440 (Hz)	
Intervalle	**½ tons**	*rapport*	*cents*	*rapport*	*cents*	*(cents)*	*tempéré*	*juste*
unisson	0	1,0000	0	1	0,00	0,00	440,00	440,00
seconde mineure	1	1,0595	100	16/15	111,73	−11,73	466,16	469,33
seconde majeure	2	1,1225	200	9/8	203,91	−3,91	493,88	495,00
tierce mineure	3	1,1892	300	6/5	315,64	−15,64	523,25	528,00
tierce majeure	4	1,2599	400	5/4	386,31	+13,69	554,37	550,00
quarte juste	5	1,3348	500	4/3	498,04	+1,96	587,33	586,67
triton	6	1,4142	600	45/32	590,22	+9,78	622,25	618,75
quinte juste	7	1,4983	700	3/2	701,96	−1,96	659,26	660,00
sixte mineure	8	1,5874	800	8/5	813,69	−13,69	698,46	704,00
sixte majeure	9	1,6818	900	5/3	884,36	+15,64	739,99	733,33
septième mineure	10	1,7818	1000	16/9	996,09	+3,91	783,99	782,22
septième majeure	11	1,8877	1100	15/8	1088,27	+11,73	830,61	825,00
octave	12	2,0000	1200	2	1200,00	0,00	880,00	880,00

Les intervalles du tempérament égal et leurs modèles justes. L'écart est positif quand l'intervalle tempéré est plus grand que le juste. Le triton n'a pas de rapport juste universellement admis ; 45/32 est celui de la gamme de Zarlino.

Le ton et le demi-ton

6.1 Le ton : deux quintes moins une octave

Pythagore, dit-on, construisait toutes les notes avec des quintes justes. De do, une quinte mène à sol ; une seconde quinte, à ré de l'octave suivante. En redescendant d'une octave, on obtient ré au-dessus de do :

$$\tfrac{3}{2} \times \tfrac{3}{2} \div 2 = \tfrac{9}{8}.$$

Le **ton** est ce rapport **9/8**, soit 203,91 cents. C'est aussi le rapport des harmoniques 8 et 9 : la série et les quintes s'accordent.

6.2 Deux demi-tons qui ne sont pas égaux

Avec des quintes justes, le ton ne se coupe pas en deux moitiés égales. Les quintes donnent deux demi-tons différents :

— le **demi-ton diatonique**, entre deux notes de noms différents — mi–fa, si–do, do–ré bémol. C'est la *seconde mineure* du guide des intervalles. En pythagoricien, il vaut 256/243, soit 90,22 cents ; on l'appelle *limma* ;

— le **demi-ton chromatique**, entre deux notes de même nom — do–do dièse, mi–mi bémol. C'est l'*unisson augmenté*. Il vaut 2187/2048, soit 113,69 cents ; on l'appelle *apotome*.

Les deux ensemble font bien un ton : 90,22 + 113,69 = 203,91 cents. Mais le chromatique est le plus grand, d'un petit intervalle de 23,46 cents : le comma pythagoricien (section 7).

La distinction n'est pas qu'une affaire d'écriture. Le guide des intervalles distingue do–ré bémol (seconde mineure) de do–do dièse (unisson augmenté), qui se jouent sur la même touche du piano. Avec des quintes justes, ce sont deux intervalles de tailles différentes : la différence que fait l'écriture se fait aussi entendre.

6.3 Le ton majeur et le ton mineur

La série des harmoniques propose un second ton : entre les harmoniques 9 et 10, le rapport **10/9**, soit 182,40 cents. On l'appelle *ton mineur*, et 9/8 *ton majeur*. Ensemble, ils font la tierce majeure juste : $\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{4}$. Dans la gamme juste de Zarlino (1558), do–ré est un ton majeur et ré–mi un ton mineur ; les deux tons de la gamme ne sont donc pas égaux.

Le comma pythagoricien

Le guide des gammes présente le *cycle des quintes* : de quinte en quinte, do, sol, ré, la, mi, si, fa dièse… jusqu'à revenir, après douze quintes, à la note de départ, sept octaves plus haut. Sur le papier, le cycle se referme sur une enharmonie : on arrive à si dièse, qui est do.

Avec des quintes justes, il ne se referme pas. Douze quintes multiplient la fréquence par $(3/2)^{12} \approx 129{,}75$, sept octaves par $2^7 = 128$. L'écart,

$$\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = \frac{531441}{524288} \approx 1{,}0136,$$

est le **comma pythagoricien** : **23,46 cents**, presque un quart de demi-ton. Si dièse, atteint par douze quintes justes, est plus haut que do d'un comma.

	Quintes justes (3/2)		**Tempérament égal**		**Écart**
Quintes	*note*	*Hz*	*note*	*Hz*	*(cents)*
0	la	440,00	la	440,00	0,00
1	mi	660,00	mi	659,26	+1,96
2	si	495,00	si	493,88	+3,91
3	fa dièse	742,50	fa dièse	739,99	+5,87
4	do dièse	556,88	do dièse	554,37	+7,82
5	sol dièse	835,31	sol dièse	830,61	+9,78
6	ré dièse	626,48	ré dièse	622,25	+11,73
7	la dièse	469,86	la dièse	466,16	+13,69
8	mi dièse	704,79	fa	698,46	+15,64
9	si dièse	528,60	do	523,25	+17,60
10	fa double dièse	792,89	sol	783,99	+19,55
11	do double dièse	594,67	ré	587,33	+21,51
12	sol double dièse	446,00	la	440,00	+23,46

Douze quintes justes depuis la 440, chaque note ramenée dans l'octave la3–la4. L'écart au tempérament égal croît de 1,96 cents par quinte ; au bout du tour, le sol double dièse sonne à 446,00 Hz au lieu de 440 : un comma pythagoricien.

Le cycle des quintes est donc en réalité une *spirale* : chaque tour remonte d'un comma. Pour en faire un cercle, il faut raccourcir certaines quintes. Le plus simple, au Moyen Âge, était d'en garder onze justes et de faire porter tout le comma à la douzième, qui devient trop courte de 23,46 cents (678,49 cents au lieu de 701,96). Cette quinte inutilisable, qui « hurle » par ses battements, s'appelle la **quinte du loup**.

Le comma syntonique

Les quintes justes ont un second défaut : leurs tierces. Quatre quintes de do mènent à mi (do, sol, ré, la, mi), deux octaves au-dessus de la tierce do–mi. Ramenée dans l'octave, cette *tierce pythagoricienne* vaut

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^4 \div 4 = \tfrac{81}{64}, \quad \text{soit } 407{,}82 \text{ cents},$$

alors que la tierce juste de la série des harmoniques, 5/4, n'en vaut que 386,31. L'écart est le **comma syntonique**, 81/80, soit **21,51 cents**. C'est aussi l'écart entre le ton majeur et le ton mineur : $\frac{9}{8} \div \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$.

La tierce pythagoricienne, trop large, sonne dure ; c'est pourquoi la musique médiévale, accordée par quintes, tenait la tierce pour une dissonance. Quand la Renaissance en a fait le cœur de l'harmonie, il a fallu choisir : des quintes justes ou des tierces justes. On ne peut avoir les deux.

« Le ton vaut neuf commas ». Les solfèges français enseignent souvent que le ton se divise en neuf commas, le demi-ton chromatique en valant cinq et le diatonique quatre — d'où la règle « do dièse est plus haut que ré bémol ». Ce comma-là, dit de Holder, est 1/53 d'octave, soit 22,64 cents : une moyenne commode entre les deux commas véritables. La règle vaut pour l'accord par quintes justes. Elle s'inverse dans les systèmes à tierces justes (le ré bémol y est plus haut que le do dièse, voir le tableau de la section 9), et ne s'applique pas au piano, où les deux notes sont la même touche.

Tempérer

Tempérer, c'est fausser un peu certains intervalles pour que tous soient utilisables. Les deux commas l'imposent : douze quintes justes ne ferment pas le cycle, et des quintes justes donnent des tierces trop larges. Trois grandes solutions se sont succédé.

— **Le tempérament mésotonique** (XVI^{e} siècle) rétrécit chaque quinte d'un quart de comma syntonique, à 696,58 cents. Quatre quintes donnent alors une tierce *exactement juste*. Le prix : le cycle se ferme encore plus mal, sur une quinte du loup de 737,64 cents, et les tonalités chargées d'altérations sont injouables.

— **Les tempéraments inégaux** (fin du XVII^{e} et XVIII^{e} siècles : Werckmeister, Kirnberger, Vallotti…) répartissent le comma inégalement entre les quintes. Toutes les tonalités deviennent jouables, mais chacune garde sa couleur, les plus simples ayant les tierces les plus pures. C'est pour de tels instruments « bien tempérés » que Bach écrit son *Clavier bien tempéré*, qui parcourt les vingt-quatre tonalités.

— **Le tempérament égal**, devenu la norme au XIX^{e} siècle, partage le comma pythagoricien également entre les douze quintes.

En cents	Pythagore	juste (Zarlino)	mésotonique	égal
quinte	701,96	701,96	696,58	700,00
ton	203,91	203,91 / 182,40	193,16	200,00
tierce majeure	407,82	386,31	386,31	400,00
demi-ton diatonique (mi–fa)	90,22	111,73	117,11	100,00
demi-ton chromatique (do–do dièse)	113,69	70,67	76,05	100,00
quinte du loup	678,49	—	737,64	700,00

Quatre systèmes, en cents. En intonation juste, le ton est majeur (9/8) ou mineur (10/9) selon sa place dans la gamme. Do dièse est plus haut que ré bémol quand le demi-ton chromatique dépasse le diatonique : en pythagoricien seulement.

Le tempérament égal

Le tempérament égal partage l'octave en **douze demi-tons égaux**. Le demi-ton est le nombre qui, multiplié douze fois par lui-même, donne 2 :

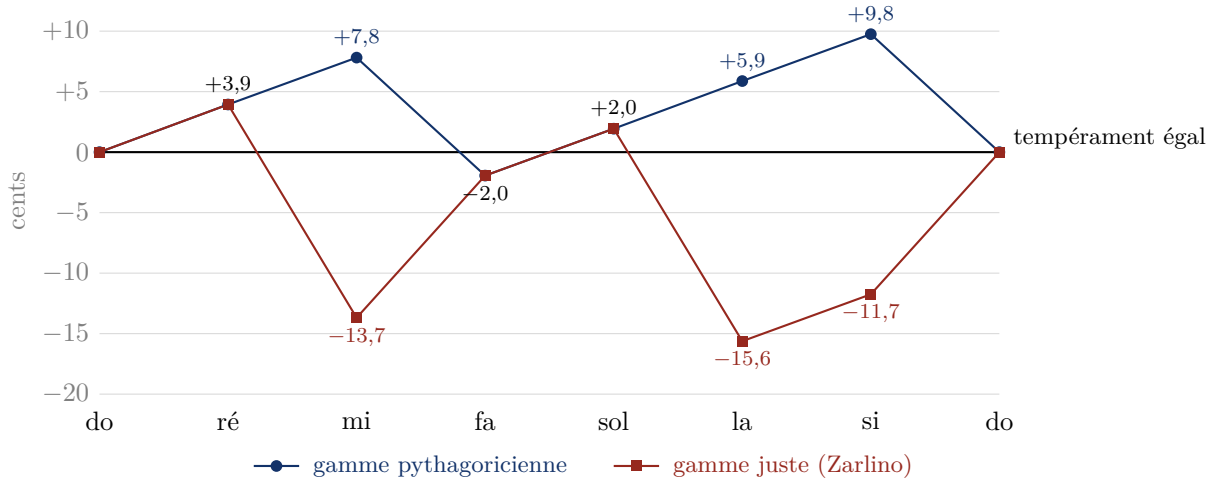
$$\sqrt[12]{2} = 2^{1/12} \approx 1{,}059463.$$

Monter d'un demi-ton multiplie la fréquence par 1,059463 ; de n demi-tons, par $2^{n/12}$. Le la3 étant à 440 Hz, la note située n demi-tons plus haut (ou plus bas, pour n négatif) vibre à

$$f = 440 \times 2^{n/12} \text{ Hz}.$$

Ainsi le mi4, sept demi-tons au-dessus du la3, est à $440 \times 2^{7/12} \approx 659{,}26$ Hz, et le do3, neuf demi-tons au-dessous, à $440 \times 2^{-9/12} \approx 261{,}63$ Hz.

Tout y est égal, donc toutes les tonalités se valent, et l'enharmonie devient exacte : do dièse et ré bémol, si dièse et do sont la même note. Le prix est réparti : la quinte est trop courte de 1,96 cents, imperceptible ; la tierce majeure trop large de 13,69 cents, la tierce mineure trop étroite de 15,64, ce qui s'entend. Les chœurs a cappella, les quatuors à cordes et les cuivres, libres de leur intonation, resserrent instinctivement leurs tierces majeures vers le juste.



La gamme de do majeur, écart de chaque degré au tempérament égal (la ligne 0). La gamme pythagoricienne, construite par quintes, a la tierce, la sixte et la sensible hautes ; la gamme juste, les mêmes degrés bas. Sur ces trois notes, mi, la et si, leur écart est le comma syntonique ; sur les quatre autres, elles coïncident.

Écouter avec le synthétiseur

Le synthétiseur de slashbin.net (`slashbin.net/musique/synth.php`) joue une note à la fois, entre 50 et 2000 Hz. Ses commandes :

— le **clavier**, de C3 à C6 (do2 à do5 en notation française), accordé en tempérament égal sur la 440 ;

— le curseur Fréquence, au hertz près — après un clic, les flèches du clavier de l'ordinateur le déplacent d'un hertz ; la ligne *Note la plus proche* nomme la touche correspondante ;

— le bouton Démarrer, qui lance le son après un réglage au curseur ; une touche du clavier le lance d'elle-même ;

— les boutons − et + de la fréquence, qui la divisent ou la multiplient par 1,059463 : ils descendent ou montent d'un demi-ton tempéré ;

— le choix de l'onde — Sinusoïdale, Triangulaire, Carrée, Dent de scie — et un oscilloscope qui la dessine.

Deux notes à la fois. Le synthétiseur ne joue qu'une note. Pour en entendre deux ensemble, et donc leurs battements, l'ouvrir dans *deux onglets* du navigateur : chacun a son propre son, et les deux se mêlent. Baisser le volume avant d'en lancer un second.

1. L'octave. Jouer A3, A4, A5 : 220, 440, 880 Hz. Le même la, à trois hauteurs. En sinus, l'oscilloscope montre deux fois plus d'oscillations à chaque octave.

2. Douze demi-tons. Jouer A4, puis appuyer douze fois sur + : la fréquence passe par toutes les

touches, noires comprises, et s'arrête à 880,00 Hz. Douze multiplications par 1,059463 doublent la fréquence. Après sept appuis seulement, on est sur mi4 (E5) : 659,25 Hz.

3. La quinte juste et la quinte tempérée. Jouer A4, puis E5 (659,25 Hz, quinte tempérée), puis amener le curseur à 660 Hz (quinte juste, $440 \times 3/2$). L'écart, 1,96 cents, ne s'entend pas d'une note à l'autre : la quinte du piano est excellente.

4. Trois tierces majeures. Sur A4, la tierce majeure est do dièse. Comparer C#5 (554,37 Hz, tempérée), puis le curseur à 550 Hz (juste, $440 \times 5/4$) et à 557 Hz (pythagoricienne, $440 \times 81/64 \approx 556{,}88$). La juste est nettement plus basse que la tempérée ; la pythagoricienne, plus haute encore.

5. Le comma pythagoricien. En partant de 440 Hz, amener le curseur successivement aux fréquences du tableau de la section 7, arrondies au hertz : 660, 495, 743, 557, 835, 626, 470, 705, 529, 793, 595, puis 446. Chaque pas est une quinte juste, ramenée dans l'octave ; la dernière note devrait être la, et sonne à 446 Hz. Rejouer A4 : l'écart, un comma, s'entend.

6. Les battements. Dans deux onglets, en sinus : l'un sur A4, l'autre au curseur à 442 Hz. Le son enfle et retombe deux fois par seconde : deux fréquences voisines produisent autant de *battements* par seconde que leur écart en hertz. À 441 Hz, un battement par seconde ; à 440, plus aucun. C'est ainsi qu'on accorde un instrument.

7. La quinte et la tierce, en battements. Passer les deux onglets en Dent de scie, riche en harmoniques. Le premier sur A4, le second sur E5 : la 3^{e} harmonique du la (1320 Hz) et la 2^{e} du mi (1318,5 Hz) battent 1,5 fois par seconde — un lent ondoiement. Amener le second à 660 Hz : le battement disparaît, la quinte est juste. Recommencer avec C#5 : la 5^{e} harmonique du la et la 4^{e} du do dièse battent 17,5 fois par seconde, une rugosité plutôt qu'un battement. À 550 Hz, la tierce juste s'apaise. Toute la question du tempérament tient dans ces deux expériences.

En résumé

— Une note est une fréquence ; un intervalle, le **rapport** de deux fréquences. Enchaîner des intervalles multiplie les rapports, ou additionne les **cents** (1200 par octave).
— L'**octave** est 2/1, la **quinte** juste 3/2, la **quarte** 4/3, la **tierce majeure** juste 5/4 : les rapports des premières harmoniques.
— Le **ton** pythagoricien est 9/8 (203,91 cents) ; il se partage en un demi-ton **diatonique** (90,22) et un **chromatique** (113,69), inégaux.
— Le **comma pythagoricien** (23,46 cents) est l'excès de douze quintes sur sept octaves ; le **comma syntonique** (21,51 cents), celui de la tierce pythagoricienne sur la juste.
— Le **tempérament égal** partage l'octave en douze demi-tons de rapport $2^{1/12}$ et de 100 cents : quintes à peine courtes ($-1{,}96$), tierces majeures nettement larges ($+13{,}69$), toutes les tonalités égales.

Colophon

La gravure de la série des harmoniques est produite par **LilyPond**, la composition par **LaTeX**, la figure des écarts par TikZ. Les tableaux, la figure, la gravure et tous les nombres cités dans le texte sont dérivés d'un unique modèle, le module `frequences.py` du dossier `outils`, qui calcule en fractions exactes quand le rapport est rationnel. Avant d'écrire quoi que ce soit, le générateur vérifie les identités que le texte affirme : que le ton majeur dépasse le mineur d'un comma syntonique, que les deux demi-tons pythagoriciens font un ton et diffèrent d'un comma pythagoricien, que la tierce mésotonique est juste, que do dièse ne dépasse ré bémol qu'en pythagoricien, et que le facteur des boutons du synthétiseur est bien le demi-ton tempéré. Pour régénérer l'ensemble :

```
python3 outils/generer_frequences.py
(cd gravures && lilypond -dcrop -formats=pdf freq-harmoniques.ly)
pdflatex frequences.tex
```