IFT 3245
Simulation et modèles

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Automne 2016

Comparaison de deux systèmes similaires

Supposons à présent qu'il est possible de diminuer légèrement le paramètre γ à de la loi gouvernant les durées de service, en prenant

$$\gamma = \gamma_2 = \gamma_1(1 - \delta),$$

pour $\delta > 0$ très petit.

Si on utilise les mêmes nombres aléatoires, cela équivaut à multiplier les durées de service par $(1 - \delta)$.

Nous voulons estimer $\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_1) = E_\gamma[X_2] - E_\gamma[X_1]$, afin de mesurer l'effet d'augmenter un peu la vitesse des serveurs.

Comparaison de deux systèmes similaires

On simule n jours pour chaque valeur de γ.

- $X_{1,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec γ_1;
- $X_{2,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec γ_2;
- $\Delta_i = X_{2,i} - X_{1,i}$,

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On peut simuler $X_{1,i}$ et $X_{2,i}$

(i) avec des v.a. indépendantes (VAI),

(ii) avec des v.a. communes (VAC).

Comparaison de deux systèmes similaires

Comme

$$\mathrm{Var}[\Delta_i] = \mathrm{Var}[X_{1,i}] + \mathrm{Var}[X_{2,i}] - 2\mathrm{Cov}[X_{1,i},\ X_{2,i}],$$

le but des variables aléatoires communes est de rendre la covariance positive.

Comment implanter les VAC?

Utiliser des “random streams” différents pour générer:

1. le facteur d’achalandage B_i;
2. les temps inter-arrivées;
3. les durées des appels;
4. les durées de patience.

Tout est généré par inversion: on utilise une uniforme par v.a.

Synchronisation

Lorsqu'on change les durées de service, les durées d'attente changent et les décisions d'abandon peuvent ainsi changer.

Si on ne génère les durées de service que pour les clients qui n'abandonnent pas, alors on peut perdre la synchronisation: on peut avoir une durée de service de moins à générer dans un système que dans l'autre.

On peut générer les durées de service:

(a) pour tous les appels, même les abandons,

(b) seulement pour les appels servis.

De même, la durée de patience n'a pas besoin d'être générée pour les clients qui n'attendent pas. On peut la générer:

(c) pour tous les appels,

(d) seulement si nécessaire.

Synchronisation: résultats (avec $n = 10^4$)

Method	$\delta = 0.1$		$\delta = 0.01$		$\delta = 0.001$	
	$\bar{\Delta}_n$	$\widehat{\mathrm{Var}}[\Delta_i]$	$\bar{\Delta}_n$	$\widehat{\mathrm{Var}}[\Delta_i]$	$\bar{\Delta}_n$	$\widehat{\mathrm{Var}}[\Delta_i]$
IRN (a + c)	55.2	56913	4.98	45164	0.66	44046
IRN (a + d)	52.2	54696	7.22	45192	-1.82	45022
IRN (b + c)	50.3	56919	9.98	44241	1.50	45383
IRN (b + d)	53.7	55222	5.82	44659	1.36	44493
CRN, no sync. (b + d)	56.0	3187	5.90	1204	0.19	726
CRN (a + c)	56.4	2154	6.29	37	0.62	1.8
CRN (a + d)	55.9	2161	6.08	158	0.74	53.8
CRN (b + c)	55.8	2333	6.25	104	0.63	7.9
CRN (b + d)	55.5	2323	6.44	143	0.59	35.3

Conditions suffisantes pour que $\text{Cov}[X, Y]$ soit positive, ou soit négative?

Comment maximiser ou minimiser la corrélation pour des lois marginales données?

Theorème (Bornes de Fréchet)

Parmi les paires de v.a. (X, Y) dont les f.r. marginales sont F et G, la paire $(X, Y) = (F^{-1}(U), G^{-1}(U))$ où $U \sim U(0, 1)$, <u>maximise</u> $\rho[X, Y]$, et la paire $(X, Y) = (F^{-1}(U), G^{-1}(1 - U))$ <u>minimise</u> $\rho[X, Y]$.

Induction de corrélation

Par exemple, si la fonction de répartition d'une durée de service est F dans le premier système et G dans le second, et si on génère les durées de service par $X = F^{-1}(U)$ et $Y = G^{-1}(U)$, alors $\text{Cov}[X, Y] \geq 0$.

Theorème

Soient $X = f(U)$ *où* $U \sim U(0, 1)$ *et* $Y = g(V)$ *où* $V \sim U(0, 1)$. *Alors,*

- *si* f *et* g *sont monotones dans le même sens et* $V = U$, *alors* $Cov[X, Y] \geq 0$*;*
- *si* f *et* g *sont monotones dans le même sens et* $V = 1 - U$, *alors* $Cov[X, Y] \leq 0$.

Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise $\Delta = X_2 - X_1$ pour estimer $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$.
On a

$$\mathrm{Var}[\Delta] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] - 2\,\mathrm{Cov}[X_1, X_2].$$

Objectif: induire une corrélation positive entre X_1 et X_2 sans changer leurs lois individuelles.

Technique: utiliser les mêmes nombres aléatoires pour simuler les deux systèmes, en essayant de maintenir la synchronisation le mieux possible.

Si $X_k = f_k(\boldsymbol{U}_k) = f_k(U_{k,1}, U_{k,2}, \dots)$ pour $k = 1, 2$, utiliser des VAC partout veut dire prendre $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$.

Theorème

Si f_1 et f_2 sont monotones dans le même sens par rapport à tous leurs arguments, alors $Cov[X_1, X_2] \geq 0$.

Pour maximiser la corrélation, il faudrait générer X_1 et X_2 directement par inversion!

Exemple: Processus de Lindley

$W_{i+1} = \max(0,\ W_i + S_i - A_i)$, où $S_i - A_i$ est indépendant de W_i.

Si X_1 et X_2 sont des fonctions non-décroissantes des W_i pour deux processus de Lindley simulés avec des VAC, alors $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] \geq 0$.

Parfois il est très difficile de vérifier les conditions du théorème.

Par exemple, pour la banque ou un centre d'appels, la monotonicité est difficile à vérifier à cause des possibilités d'abandon. De plus, les conditions du théorème sont <u>suffisantes</u>, mais <u>pas nécessaires</u>.

Valeurs aléatoires communes (VAC)

Pour tester si c'est efficace en pratique: faire une expérience pilote avec les VAC et estimer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Il n'est pas nécessaire de faire de simulations sans les VAC: pour estimer la variance qu'on aurait sans les VAC, il suffit de prendre la version empirique de $\mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]$.