IFT 3245
Simulation et modèles

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Automne 2016

Structure de réseau

Considérons le sous-ensemble de $[0,1]^t$ construit à partir des différents états initiaux possibles du générateur.

$$\Psi_t = \{\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_{t-1}) = (g(s_0), \ldots, g(s_{t-1})),\ s_0 \in \mathcal{S}\}.$$

Un critère majeur est que Ψ_t doit recouvrir $[0,1]^t$ très uniformément, et ce pour "tout" t.

Par généralisation, nous chercherons également à mesurer l'uniformité de $\Psi_I = \{(u_{i_1}, \ldots, u_{i_t}) \mid s_0 \in \mathcal{S}\}$ pour une classe choisie d'ensembles d'indices de forme $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$. La récurrence linéaire à la base d'un MRG a comme conséquence majeure de produire une structure pour l'ensemble Ψ_t.

Structure de réseau

Soit $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ dans $\{0, 1, \ldots, m-1\}^k$, et la base canonique de $\mathcal{R}^k$:

$$\{\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, \ldots, k\},$$

Si $(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, la récurrence du MRG donne

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_k) &= (0, \ldots, a_k), \\
(x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) &= (0, \ldots, a_k,\ a_1 a_k \mod m), \\
(x_3, \ldots, x_{k+2}) &= (0, \ldots, (a_1^2 + a_2) a_k \mod m), \ldots
\end{aligned}$$

Si $(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, alors

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_k) &= (1, 0, \ldots, a_{k-1}), \\
(x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) &= (0, \ldots, a_{k-1},\ (a_1 a_{k-1} + a_k) \mod m), \\
(x_3, \ldots, x_{k+2}) &= (0, \ldots, (a_1^2 a_{k-1} + a_1 a_k + a_2 a_{k-1}) \mod m), \ldots
\end{aligned}$$

Structure de réseau

Nous pouvons continuer de la sorte jusqu'à considérer $(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \boldsymbol{e}_k = (0, \ldots, 0, 1)$, ce qui produit

$$(x_1, \ldots, x_k) = (0, \ldots, 1, a_1),$$
$$(x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = (0, \ldots, 1, a_1, (a_1^2 + a_2) \mod m), \ldots.$$

Or tout vecteur $(x_n, \ldots, x_{n+t-1})$ qui obéit à la récurrence, pour $t \geq k$, est une combinaison linéaire à coefficients entiers de ces k vecteurs de base.

Pour le voir, notons $x_{i,0}, x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots$ la suite obtenue à partir du vecteur de base $\boldsymbol{e}_i$. Un état initial $(x_0, \ldots, x_{k-1}) = (z_1, \ldots, z_k)$ peut s'écrire comme $z_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + z_k\boldsymbol{e}_k$ et produit la suite

$$z_1(x_{1,0}, x_{1,1}, \ldots) + \cdots + z_k(x_{k,0}, x_{k,1}, \ldots) \mod m,$$

et réciproquement.

Structure de réseau

La réduction modulo m se fait en soustrayant des vecteurs $m\boldsymbol{e}_i$. Ainsi, pour $t \geq k$, $(x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$ suit la récurrence si et seulement s'il s'agit d'une combinaison linéaire à coefficients entiers de

$$
\begin{gathered}
(1, 0, \ldots, 0, x_{1,k}, \ldots, x_{1,t-1}) \\
\vdots \\
(0, 0, \ldots, 1, x_{k,k}, \ldots, x_{k,t-1}) \\
(0, 0, \ldots, 0, m, \ldots, 0) \\
\vdots \\
(0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, m).
\end{gathered}
$$

Structure de réseau

En divisant par m, on obtient que $(u_0, \ldots, u_{t-1}) \in [0,1)^t$ est dans Ψ_t si et seulement si c'est une combinaison linéaire (sur les entiers) de

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (1, 0, \ldots, 0, x_{1,k}, \ldots, x_{1,t-1})^T / m \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\boldsymbol{v}_k &= (0, 0, \ldots, 1, x_{k,k}, \ldots, x_{k,t-1})^T / m \\
\boldsymbol{v}_{k+1} &= (0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)^T \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\boldsymbol{v}_t &= (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 1)^T.
\end{aligned}$$

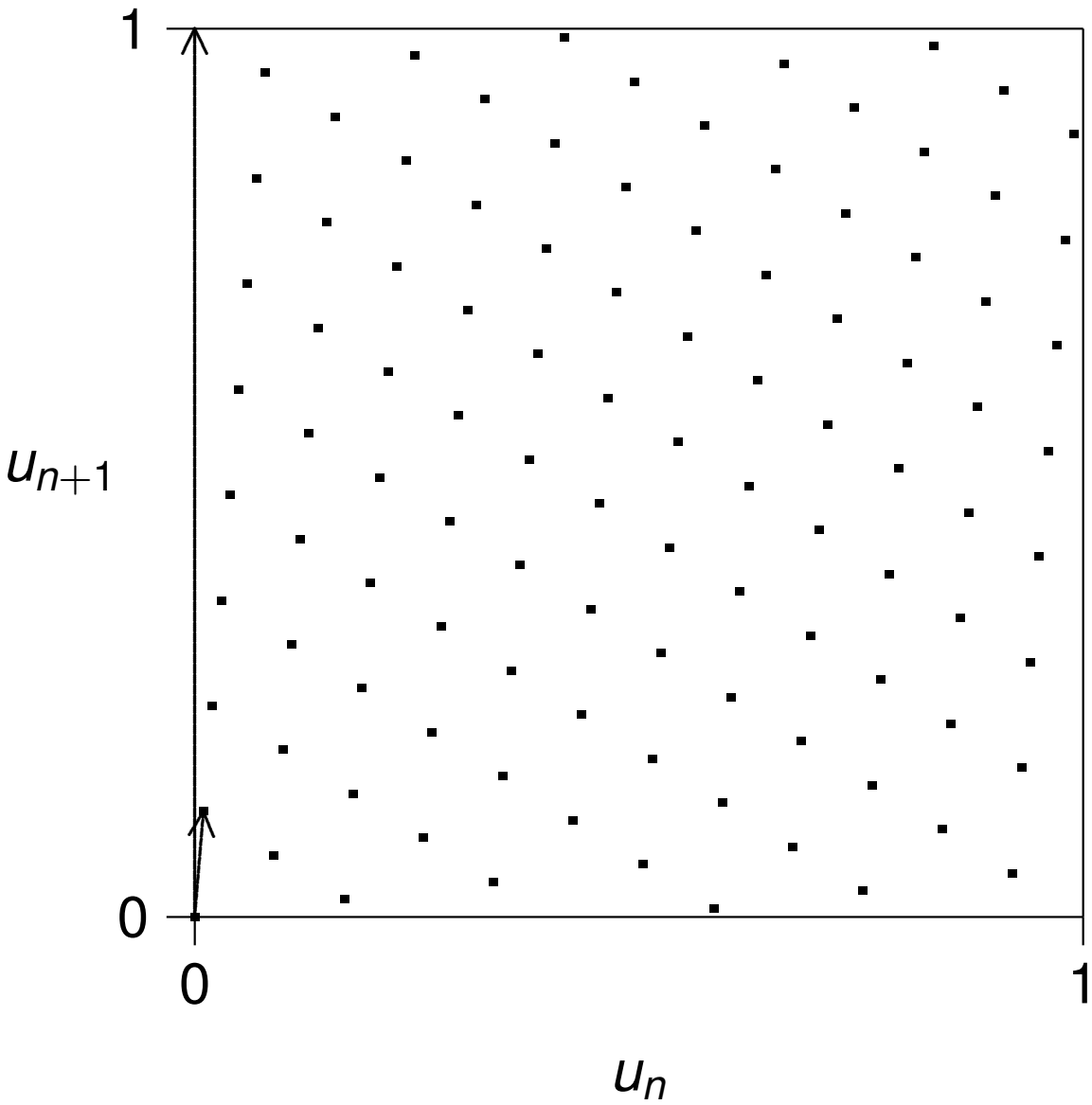
Structure de réseau

Si

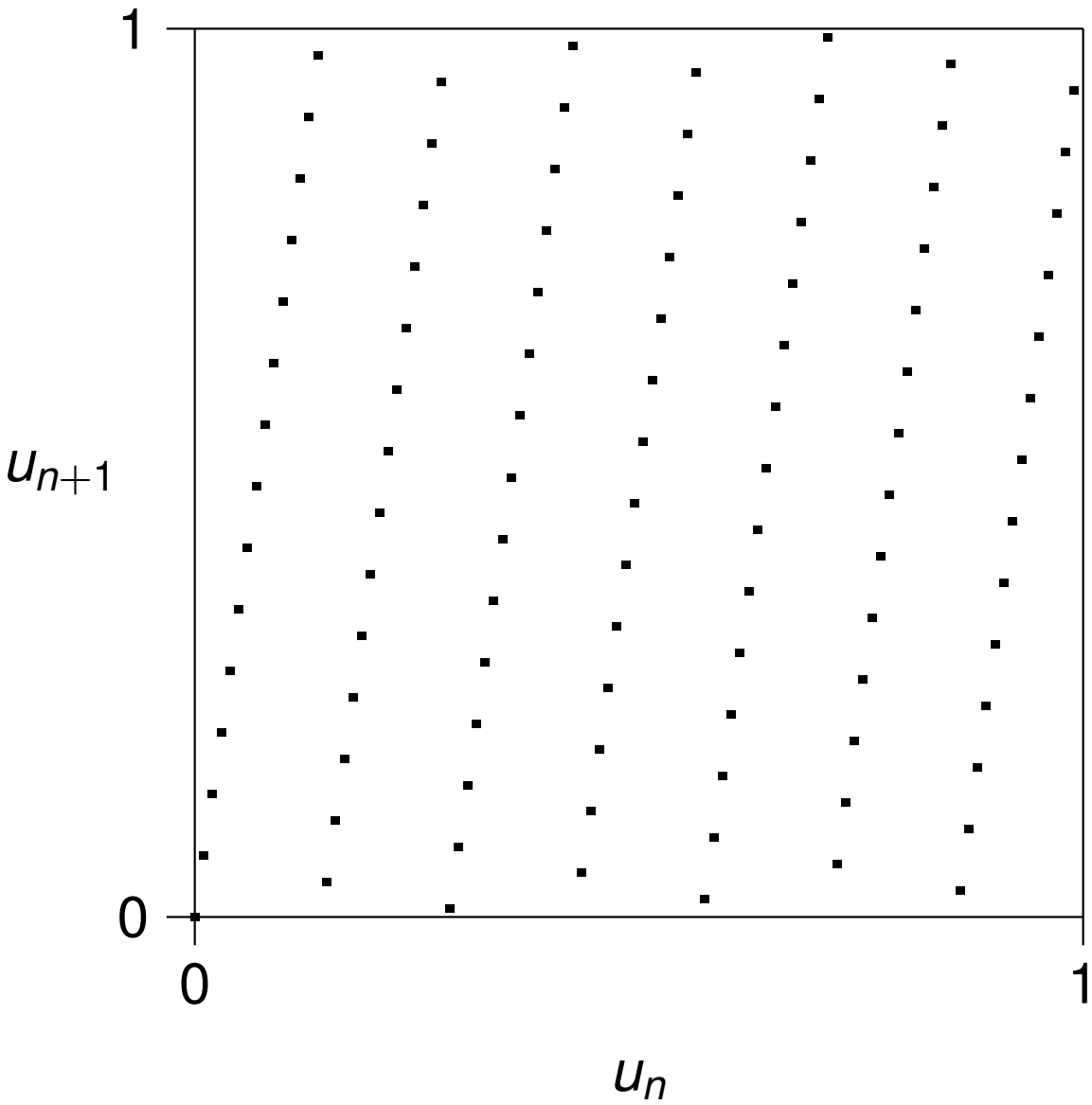
$$L_t = \left\{ \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{t} z_i \boldsymbol{v}_i \mid z_i \in \mathcal{Z} \right\}$$

est le réseau ayant ces vecteurs pour base, alors $\Psi_t = L_t \cap [0,1)^t$.

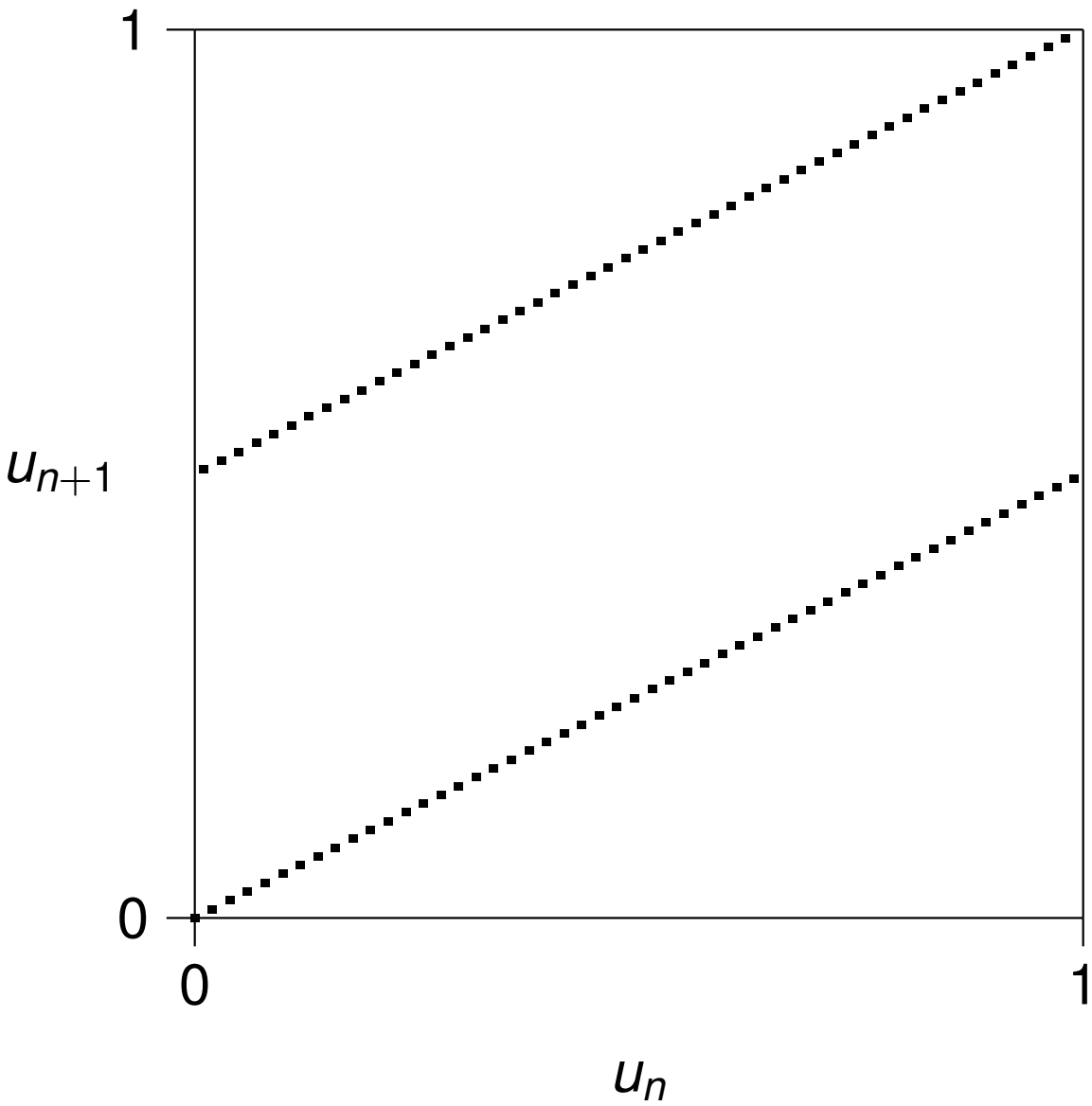
$m = 101$, $a = 12$; $\boldsymbol{v}_1 = (1, 12)/101$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1)$



LCG with $m = 101$ and $a = 7$



LCG with $m = 101$ and $a = 51$



LCG with $m = 101$ and $a = 51$

Pour $t > k$, il y a m^t vecteurs dont les coordonnées sont des multiples de $1/m$, mais seulement m^k sont dans Ψ_t (il n'y a que m^k états initiaux possible), soit une proportion de $1/m^{t-k}$.

Cette structure de réseau implique que les points de Ψ_t sont distribués suivant un schéma très régulier.

Par exemple, chaque point de L_t a un plus proche voisin à la même distance et dans la même direction que n'importe quel autre point, et il y a des familles d'hyperplans parallèles équidistants qui couvrent tous les points.

Structure de réseau

Au regard de cette structure particulière, des manières naturelles de mesurer l'uniformité de ce genre d'ensemble de points Ψ_t incluent:

1. la distance d'un point à son plus proche voisin, qui est aussi la distance de l'origine au point le plus proche, ou de manière équivalente le vecteur non-nul le plus court dans L_t;
2. La distance entre les deux hyperplans les plus éloignés qui couvrent une région ne contenant aucun point de L_t;
3. le nombre minimum d'hyperplans équidistants parallèles qui peuvent couvrir tous les points de Ψ_t.

Distance au plus proche voisin

Pour obtenir la première mesure, nous devons calculer le plus court vecteur non nul dans un réseau de base $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t$:

$$\text{Minimiser } \|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} z_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_j z_j$$

sous les contraintes que $z_1, \ldots, z_t$ soient entiers et non tous nuls.

Il s'agit par conséquent d'un probléme d'optimisation quadratique en nombres entiers, lequel est difficile à résoudre.

Distance entre les hyperplans

Pour traiter les deux autres mesures proposées, nous avons tout d'abord besoin de définir le réseau dual, dénoté L_t^*, comme suit:

$$L_t^* = \{\boldsymbol{h} \in \mathcal{R}^t : \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathcal{Z} \text{ pour tout } \boldsymbol{v} \in L_t\}.$$

Pour chaque vecteur $\boldsymbol{h} \in L_t^*$ et chaque entier z, l'ensemble $\{\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}^t : h^T v = z\}$ est un hyperplan orthogonal à h. Quand z parcourt tous les entiers, nous obtenons dès lors une famille d'hyperplans parallèles qui couvrent tous les points $\boldsymbol{v}$ de L_t, car $\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{v} \in \mathcal{Z}$ pour $\boldsymbol{v} \in L_t$.

La distance entre deux hyperplans est la distance entre l'hyperplan défini avec $z = 1$ et celui défini avec $z = 0$, i.e., à l'origine, puisque ce dernier contient l'origine.

Distance entre les hyperplans

Il est possible de montrer que cette distance vaut $1/\|\boldsymbol{h}\|_2$. Si ℓ_t est la longueur du plus court vecteur $\boldsymbol{h}$ non nul dans L_t^*, alors la distance entre les hyperplans pour la famille où ils sont le plus éloignés est $1/\ell_t$. Par conséquent, nous cherchons à maximiser ℓ_t.

Un petit nombre d'hyperplans parallèles couvrant tous les points de ψ_t peut être trouvé en calculant le vecteur non-nul le plus court dans L_t^* en utilisant la norme $\mathcal{L}_1$ au lieu de la norme euclidienne.

Indices lacunaires

Plutôt de que considérer des indices consécutifs, nous pouvons considérer n'importe quel ensemble de t index (distincts) $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} \Psi_I &= \{(u_{i_1}, \ldots, u_{i_t}) \mid s_0 = (x_0, \ldots, x_{k-1}) \in \mathcal{Z}_m^k\}, \\ &= L_I \cap [0,1)^t, \\ 1/\ell_I &= \text{ distance entre les hyperplans dans } L_I. \end{aligned}$$

Note: $\mathcal{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

Mesures d'uniformité

Des bornes supérieures de la forme $\ell_t \leq \ell_t^*(n)$ pour un réseau général de densité n dans $\mathcal{R}^t$ existent.

Nous pouvons dès lors standardiser ℓ_t par $\ell_t/\ell_t^*(m^k)$ pour avoir une mesure dans $[0, 1]$, ce qui permet d'obtenir la figure de mérite générale:

$$M_{\mathcal{J}} = \min_{I \in \mathcal{J}} \ell_I/\ell_{|I|}^*(m^k)$$

où $\mathcal{J}$ est une famille d'ensembles $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$.

La recherche de générateurs potentiellement intéressants passe alors par le calul numérique des paramètres qui maximisent cette mesure.

Autres bornes

Si $i \in I$ lorsque $a_{k-i} \neq 0$ (avec $a_0 = -1$), alors

$$\ell_I^2 \leq 1 + a_1^2 + \cdots + a_k^2.$$

Il faut donc que cette somme soit grande!

Preuve partielle.

Considérons $I = \{0, \ldots, t-1\}$ et prenons $\boldsymbol{h} = (-a_k, \ldots, -a_1, 1, 0, \ldots, 0)^T$. Si $\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{t-1})^T \in L_t$, alors

$$v_k = (a_1 v_{k-1} + \cdots + a_k v_0) \mod 1$$

ou

$$0 = (v_k - a_1 v_{k-1} - \cdots - a_k v_0) \mod 1 = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{v} \mod 1.$$

Ainsi, $\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{v}$ doit être un entier, i.e., $\boldsymbol{h} \in L_t^*$.
Donc $\ell_t^2 \leq \|\boldsymbol{h}\|_2^2 = 1 + a_1^2 + \cdots + a_k^2$.
Se généralise au cas de ℓ_I.

Exemple: Lagged-Fibonacci

$$x_n = (\pm x_{n-r} \pm x_{n-k}) \mod m.$$

Pour $I = \{0, k-r, k\}$, on a $1/\ell_I \geq 1/\sqrt{3} \approx .577$.
Les vecteurs $(u_n, u_{n+k-r}, u_{n+k})$ sont tous contenus dans deux plans!

Fonction `random` de la glibc

L'exemple à éviter...

Le générateur commence par inialiser un tableau de 34 nombres sur le principe du générateur Standard Minimal:

1. $x_0 = s$; $x_i = 16807 * x_{i-1} \mod 2^{31} - 1$ (pour $i = 1, \ldots, 30$);
2. $x_i = x_{i-31}$ (pour $i = 31, \ldots, 33$) .

Pour $i \geq 34$, l'algorithme suit l'algorithme de Lagged-Fibonacci, avec $m = 2^{31}$:

$$x_i = (x_{i-3} + x_{i-31}) \mod 2^{31}.$$

Enfin, la fonction ignore les 344 premiers nombres et supprime le bit de poids faible:

$$o_i = x_{i+344} >> 1.$$

Fonction `random` de la glibc: observations

Le générateur résume ce qu'il convient de ne pas faire:

1. le générateur Standard Minimal est dépassé;
2. les vecteurs x_i, x_{i+28}, x_{i+31} sont contenus dans deux plans;
3. la linéarité n'est pas complétement supprimée en enlevant le bit de poids faible, vu que pour $i \geq 34$,

   $$o_i = o_{i-31} + o_{i-3} \mod 2^{31} \text{ ou } o_i = o_{i-31} + o_{i-3} + 1 \mod 2^{31},$$

   et on conserve la majeure partie des inconvénients liés à $m = 2^{31}$.