

# MODÈLES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE



Fabian Bastin

[bastin@iro.umontreal.ca](mailto:bastin@iro.umontreal.ca)

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle  
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin>



La présente version de ce document s'inspire des notes de Patrice Marcotte, Bernard Gendron, ainsi que des livres *Introduction to Operational Research* [2] et *The Basics of Practical Optimization* [5].

Photographie de couverture: viaduc de Millau, France.  
©Fabian Bastin, 2006



Le présent document peut être modifié et redistribué à des fins non commerciales, sous conditions d'être diffusé sous les mêmes conditions.

©Fabian Bastin, 2015

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Les origines de la recherche opérationnelle . . . . .	1
1.2	La nature de la recherche opérationnelle . . . . .	1
1.3	Modélisation . . . . .	2
1.4	Algorithmes et logiciels . . . . .	5
1.4.1	Un exemple avec GAMS . . . . .	6
1.5	Notes . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Programmation linéaire</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Modèle général de programmation linéaire . . . . .	10
2.3	Terminologie de base . . . . .	11
2.4	Hypothèses . . . . .	11
2.5	La méthode du simplexe . . . . .	16
2.5.1	Solution de base . . . . .	17
2.5.2	Interprétations . . . . .	18
2.5.3	Critère d'optimalité . . . . .	19
2.5.4	Adaptation à d'autres formes de modèles . . . . .	22
2.5.5	Obtention d'une base admissible initiale . . . . .	23
2.5.6	Variables à valeurs quelconques . . . . .	24
2.6	Dualité . . . . .	24
2.6.1	Motivation . . . . .	24
2.6.2	Analyse de sensibilité . . . . .	26
2.7	Notes . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Programmation non linéaire</b>	<b>31</b>
3.1	Fonctions convexes et concaves . . . . .	31
3.1.1	Ensembles convexes . . . . .	32
3.2	Algorithmes . . . . .	36
3.2.1	L'algorithme du simplexe dans le cas non-linéaire . . . . .	36
3.2.2	Optimisation sans contrainte . . . . .	36
3.2.3	Méthode de la bisection . . . . .	36
3.2.4	Méthode du gradient . . . . .	37
3.2.5	Optimisation sous contraintes . . . . .	38
3.2.6	Conditions d'optimalité . . . . .	39
3.3	Notes . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Programmation mixte entière</b>	<b>43</b>
4.1	Présentation générale . . . . .	43
4.2	Contraintes mutuellement exclusives . . . . .	47
4.2.1	Deux contraintes . . . . .	47
4.2.2	$K$ contraintes parmi $N$ . . . . .	47
4.2.3	Fonction ayant $N$ valeurs possibles . . . . .	48
4.2.4	Objectif avec coûts fixes . . . . .	48

4.2.5	Variables entières en variables 0–1 . . . . .	49
4.2.6	Problème de recouvrement . . . . .	51
4.3	Stratégies de résolutions . . . . .	53
4.3.1	Relaxation linéaire . . . . .	53
4.3.2	Approche par énumération . . . . .	53
4.3.3	Les hyperplans coupants (méthode de coupe) . . . . .	60
4.4	Modélisation avec GAMS . . . . .	62
4.5	Exercices . . . . .	65
4.6	Notes . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Réseaux</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1	Graphes . . . . .	67
5.1.1	Graphe orienté . . . . .	67
5.1.2	Graphe non orienté . . . . .	68
5.1.3	Transformations . . . . .	68
5.1.4	Chemins et circuits . . . . .	68
5.1.5	Connexité . . . . .	68
5.2	Problème du chemin le plus court - algorithmes de corrections d'étiquettes . . . . .	69
5.2.1	Algorithme de Dijkstra . . . . .	70
5.3	Flot dans un réseau . . . . .	72
5.3.1	Réseau . . . . .	72
5.3.2	Modèle de flot . . . . .	72
5.3.3	Algorithme de Bellman-Ford . . . . .	72
5.3.4	Modèle du chemin critique (PERT/CPM) . . . . .	73
5.4	Problème de l'arbre partiel minimum . . . . .	74
5.4.1	Algorithme de Prim (1957) . . . . .	75
5.5	Problème du flot maximum . . . . .	75
5.5.1	Algorithme de Ford-Fulkerson . . . . .	76
5.5.2	Flot maximum - Coupe minimum . . . . .	80
5.6	Problème de flot minimum . . . . .	82
5.7	Exercices . . . . .	82
5.8	Notes . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Modèles stochastiques</b> . . . . .	<b>83</b>
6.1	Concepts de base . . . . .	83
6.2	Variable aléatoire . . . . .	84
6.2.1	Variables aléatoires discrètes . . . . .	85
6.2.2	Variables aléatoires continues . . . . .	85
6.2.3	Espérance mathématique . . . . .	85
6.2.4	Variance . . . . .	86
6.3	Loi de probabilité . . . . .	86
6.3.1	Loi de Bernoulli . . . . .	86
6.3.2	Loi uniforme . . . . .	86
6.3.3	Loi de Poisson . . . . .	87
6.3.4	Loi exponentielle . . . . .	87
6.4	Modèles stochastiques . . . . .	87
6.4.1	Processus stochastiques . . . . .	87
6.4.2	Chaînes de Markov . . . . .	88
6.5	Notes . . . . .	89

<b>7</b>	<b>Programmation dynamique</b>	<b>91</b>
7.1	Principe d'optimalité de Bellman . . . . .	91
7.2	Affectation de ressources . . . . .	94
7.3	Programmation dynamique déterministe et plus court chemin . . . . .	96
7.4	Cas probabiliste . . . . .	96
7.5	Notes . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Simulation</b>	<b>99</b>
8.1	Introduction . . . . .	99
8.2	Files d'attente . . . . .	99
8.2.1	Concepts de base . . . . .	99
8.2.2	Modèle $M/M/1$ . . . . .	100
8.3	Simulation à événements discrets . . . . .	103
8.4	Notes . . . . .	103
<b>Annexe</b>		<b>105</b>
8.5	Logiciels d'optimisation . . . . .	105
8.5.1	IOR Tutorial . . . . .	105
8.5.2	GAMS . . . . .	105
8.5.3	Autres logiciels . . . . .	111
8.6	Notes . . . . .	111
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>



*OR is the art of winning wars without actually fighting.*

Aurther Clarke

# 1

## Introduction

### 1.1 Les origines de la recherche opérationnelle

Les origines de la recherche opérationnelle, en abrégé RO, ne sont pas clairement définies, bien que Charles Babbage (1791–1871) soit souvent considéré comme le père de la recherche opérationnelle, en raison de ses travaux sur le coût du transport et le tri du courrier, menant à l'introduction du Penny Post en Angleterre, en 1840.



FIGURE 1.1 – Patrick Blackett

Un siècle plus tard, la seconde guerre mondiale, de part son envergure, créa un besoin urgent d'allouer de manière efficace des ressources limitées aux différentes opérations militaires et aux activités au sein de chaque opération. En particulier, l'organisation militaire britannique, puis américaine, mit à contribution un grand nombre de scientifiques pour gérer ces allocations, et s'occuper d'autres problèmes stratégiques et tactiques. Ce faisant, ils furent appelés à poursuivre des recherches sur des opérations (militaires), et constituèrent les premières équipes de RO, notamment celle dirigée par Patrick Blackett, prix Nobel de physique en 1948 [3]. Leurs efforts furent significatifs dans la marche vers la victoire, par exemple en ce qui touche l'utilisation du radar, nouvellement développé. Ces succès encouragèrent la poursuite de l'utilisation de la RO dans d'autres domaines. La croissance importante de l'industrie d'après-guerre entraîna des problèmes, causés par la complexité croissante et la spécialisation dans les organisations, problèmes en fait proches de ceux présent lors du conflit. Au début des années 1950's, la RO avait pénétré une multitude d'organisations commerciales, industrielles, et gouvernementales.

Et ce n'était que le début.

Au moins deux autres facteurs ont joué un rôle clé dans la croissance rapide de la RO. Tout d'abord, des progrès substantiels ont été obtenus très tôt afin d'améliorer les techniques de RO. Ces techniques, dans leur mise en pratique, furent soutenues par l'essor des outils informatiques.

### 1.2 La nature de la recherche opérationnelle

“Rechercher sur des opérations” touche tous les problèmes reliés à la conduite et à la coordination des opérations (activités) au sein d'une organisation. Cette organisation peut représenter des domaines très divers: l'industrie manufacturière, le transport, la construction, les télécommunications, la finance, les soins de santé, . . . La RO, associée à la révolution informatique, pénètre pratiquement tous les secteurs d'activités de la vie courante, même si sa présence est souvent invisible.

La première étape de la “recherche” est l'observation attentive du problème et sa formulation, ainsi que la collecte de données associées. Il convient par la suite de construire un modèle scientifique qui tente l'abstraire l'essence du

problème réel. Tout modèle est une simplification de la réalité, mais cette représentation doit être suffisamment précise pour capturer les caractéristiques essentielles de la situation, et de pouvoir tirer des conclusions valides pour le problème réelle. Il conviendra dès lors de tester ce modèle, et de le modifier au besoin.

Une caractéristique additionnelle est que la RO essaye souvent de trouver la meilleure solution (dite solution optimale) pour le problème examiné. Cette solution peut ne pas être unique. Cette recherche d’optimalité est un thème important en RO, même si son interprétation en terme managériels peut être délicate. Il est difficile pour un individu de pouvoir maîtriser tous les aspects du problèmes à l’étude, de sorte que la RO est généralement plus un travail d’équipe, avec des experts en mathématiques, statistiques et probabilités, ingénierie, économie, administration, informatique, physiques, sciences comportementales, et les techniques spécifiques de la RO.

### 1.3 Modélisation

Un modèle, telle que considéré dans ce cours, est une construction mathématique utilisée pour représenter certains aspects significatifs de problèmes du monde réel. Il y a beaucoup de types différents de modèles mathématiques, mais nous nous focaliserons dans un premier temps sur les modèles d’optimisation. Il y a trois composantes principales dans un modèle d’optimisation:

**Variables:** elles représentent les composantes du modèle qui peuvent être modifiées pour créer des configurations différentes.

**Contraintes:** elles représentent les limitations sur les variables.

**Fonction objectif :** cette fonction assigne une valeur à chaque configuration différente. Le terme “objectif” vient du fait que l’objectif est d’optimiser cette fonction.

**Exemple 1** (Un exemples de décisions binaires (oui/non)). *Un étudiant en quête d’une université projette de visiter les campus de trois universités du Maine au cours d’un voyage unique, débutant et finissant à l’aéroport de Portland. Les trois établissements sont dans les villes de Brunswick, Lewiston, et Waterville, et l’étudiant ne veut visiter chaque ville qu’une seule fois, tout en maintenant le trajet total le plus court possible. Les distances entre ces villes sont données dans la Table 1.1.*

Ville	Portland	Brunswick	Lewiston	Waterville
Portland	0	26	34	78
Brunswick	26	0	18	52
Lewiston	34	18	0	51
Waterville	78	52	51	0

TABLE 1.1 – Distances entre les villes (miles)

*L’étape la plus importante dans la construction d’un modèle est le choix des variables qui vont entrer en jeu. Dans le présent cas, puisque n’importe quel trajet consiste en une série de petits déplacements entre deux villes, il est raisonnable d’assigner des variables aux décisions de partir ou non d’une ville vers une autre. Pour plus de faciliter, numérotions les villes comme suit: 1 pour Portland, 2 pour Brunswick, 3 pour Lewiston et 4 pour Waterville. Ainsi, nous aurons une variable  $x_{1,2}$  égale à 1 si l’étudiant voyage de Portland à Brunswick au cours de son parcours total, et 0 sinon. Puisqu’il n’y a pas de voyage d’une ville vers cette même ville, nous avons d’ores et déjà les contraintes*

$$x_{i,i} = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (1.3.1)$$

*Une fois les variables choisies, nous pouvons essayer de formuler le problème. Ce processus est en fait souvent une manière utile pour guider le choix des variables.*

*Chaque ville ne devant être visitée qu’une seule fois, elle ne peut apparaître qu’une seule fois comme ville d’arrivée. En d’autres termes, pour  $j$  fixé,  $x_{i,j}$  ne peut être non-nul que pour un  $i$  donné, avec  $i \neq j$ . Une manière plus simple d’encoder cette information est d’écrire, pour  $j = 1, \dots, 4$ ,*

$$x_{1,j} + x_{2,j} + x_{3,j} + x_{4,j} = 1,$$



ou de manière plus concise.

$$\sum_{i=1}^4 x_{i,j} = 1, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (1.3.2)$$

Les contraintes formulées jusqu'à présent ne garantissent aucune forme de trajet ayant même départ et arrivée. Par exemple, l'affectation  $x_{1,2} = 1$ ,  $x_{1,3} = 1$ ,  $x_{1,4} = 1$ ,  $x_{2,1} = 1$ , et toutes les autres variables égales à 0, satisfont les contraintes 1.3.1 et 1.3.2. Cette solution décrit toutefois un schéma de visites impossible puisque Portland est l'origine de tous les déplacements aux trois autres villes universitaires, mais n'est destination que depuis Brunswick. Nous avons évidemment aussi besoin des contraintes

$$\sum_{j=1}^4 x_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1.3.3)$$

afin d'assurer que chaque ville ne serve d'origine que pour exactement un déplacement vers une autre ville. Finalement, afin d'obtenir un véritable trajet ayant même origine et départ, nous devons rejeter les affectations qui décrivent des groupes déconnectés de petits déplacements comme  $x_{1,2} = x_{2,1} = 1$ ,  $x_{3,4} = x_{4,3} = 1$ , avec toutes les autres variables égales à 0. Nous pouvons forcer ceci avec les contraintes

$$x_{i,j} + x_{j,i} \leq 1, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{et } j = 1, \dots, 4.$$

Cette contrainte exclut tout mini-cycle.

Les contraintes définies, nous devons décrire la distance totale associée à n'importe quel parcours autorisé. Puisque nos variables ont seulement comme valeurs possibles 0 ou 1, nous pouvons multiplier chacune d'elle par la distance correspondante entre les deux villes indexées, et les additionner:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_{i,j} a_{i,j}.$$

Notre modèle mathématique consiste à minimiser cette fonction, dite fonction objectif par rapport aux variables  $x_{i,j}$ , tout en satisfaisant les contraintes préalablement décrites:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_{i,j} a_{i,j}, \\ \text{s.c.} \quad & x_{i,i} = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ & \sum_{i=1}^4 x_{i,j} = 1, \quad j = 1, \dots, 4, \\ & \sum_{j=1}^4 x_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, 4, \\ & x_{i,j} + x_{j,i} \leq 1, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{et } j = 1, \dots, 4, \\ & x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{et } j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Ici,  $x = (x_{i,j})_{i=1,\dots,4,j=1,\dots,4}$ , et s.c., "sous les contraintes". Le problème d'optimisation ainsi construit constitue un programme mathématique.

Le problème de visites d'universités est assez petit que pour être résolu explicitement, sans recourir à des méthodes d'optimisation numérique. Puisqu'il y a seulement trois parcours significativement différents, la distance totale associée à chacun d'eux pourrait être facilement calculée, et nous choisissons le parcours de longueur minimale, qui est ici

$$\text{Portland} \rightarrow \text{Brunswick} \rightarrow \text{Waterville} \rightarrow \text{Lewiston} \rightarrow \text{Portland}.$$

avec une distance totale de 163 miles. Il est cependant clair qu'une telle stratégie de résolution ne fonctionne plus comme le nombre de villes augmente.

**Exemple 2** (Un problème de mélange). *Un armateur doit construire un navire de guerre à partir de 50 tonnes d'acier contenant entre 0.5% et 1.25% de carbone (C), entre 0.3% and 0.5% de silicone (Si), pas plus de 0.05% de sulfure (Su), et pas plus de 0.04% de phosphore (Ph). Un fournisseur produit de l'acier à partir de sept matières premières dont les qualités, les disponibilités en tonnes, et les coûts en \$/tonne sont donnés dans la Table 2. Le fournisseur veut déterminer la combinaison la moins coûteuse de composants bruts qu'il peut utiliser pour produire l'acier répondant aux besoins de l'armateur.*

Matière première	% C	% Si	% Su	% Ph	Disponibilité	Coût
limonite	3.0	0	0.013	0.015	40	200
taconite	2.5	0	0.008	0.001	30	250
hématite	0	0	0.011	0.05	60	150
magnétite	1.2	0	0.002	0.008	50	220
silicone 1	0	90	0.004	0.002	20	300
silicone 2	0	96	0.012	0.003	30	310
charbon	90	0	0.002	0.01	25	165

TABLE 1.2 – Données pour le problème de production d'acier

Puisque les fournisseur peut changer les quantités de matières premières utilisées dans la production de l'acier, nous pourrions assigner une variable différente pour représenter la quantité de chaque matière première:

- $x_1$  = tonnes de limonite,
- $x_2$  = tonnes de taconite,
- $x_3$  = tonnes d'hématite,
- $x_4$  = tonnes de magnétite,
- $x_5$  = tonnes de silicone 1,
- $x_6$  = tonnes de silicone 2,
- $x_7$  = tonnes de charbon.

Notons que les variables sont ici continues, contrairement à l'exemple précédent.

Afin de modéliser les contraintes, observons tout d'abord que les variables dans ce cas sont naturellement bornées inférieurement par 0 (puisque des quantités négatives ne feraient pas de sens), et bornées supérieurement par leur quantité disponible, aussi avons-nous:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x_1 \leq 40, \\
 0 &\leq x_2 \leq 30, \\
 0 &\leq x_3 \leq 60, \\
 0 &\leq x_4 \leq 50, \\
 0 &\leq x_5 \leq 20, \\
 0 &\leq x_6 \leq 30, \\
 0 &\leq x_7 \leq 25.
 \end{aligned}$$

En supposant que n'importe quelle quantité d'une matière première contribue pour la même quantité d'acier, et en sachant que nous devons produire au moins 50 tonnes, nous avons

$$\sum_{i=1}^7 x_i \geq 50.$$

Notons que nous ne supposons pas que nous produirons exactement 50 tonnes, puisqu'il peut être nécessaire de produire d'avantage afin de satisfaire les autres exigences du problème.

L'autre caractéristique contraignante dans ce problème que que l'acier doit contenir un certain pourcentage de carbone, de silicone, de sulfure et de phosphore. Afin de voir comment ces exigences de composition se traduisent en contraintes par rapport à nos variables, nous nous concentrerons d'abord sur l'exigence d'avoir entre 0.5% et 1.25%

de carbone, en espérant que les exigences sur le silicone, le sulfure et le phosphore se formulent de manière similaire. À partir des données, nous connaissons le pourcentage de contribution en carbone de chaque matière première, aussi nous pouvons facilement calculer la quantité de carbone pour n'importe quel choix de variables comme

$$0.03x_1 + 0.025x_2 + 0.012x_4 + 0.9x_7.$$

Cependant, comme nous avons une exigences de proportion de carbone dans l'acier, nous devons diviser cette quantité de carbone par la quantité d'acier:

$$\%C = 100 \left( \frac{\text{tonnes de carbone}}{\text{tonnes d'acier}} \right) = \frac{3.0x_1 + 2.5x_2 + 1.2x_4 + 90x_7}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}.$$

La contrainte que l'acier contienne entre 0.5% et 1.25% de carbone se traduit dans la paire de contraintes

$$0.5 \leq \frac{3.0x_1 + 2.5x_2 + 1.2x_4 + 90x_7}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7} \leq 1.25. \quad (1.3.4)$$

Les contraintes pour les autres composants se formulent de manière similaires.

Puisque ce problème implique de trouver la combinaison la moins coûteuse de matières premières qui rencontre la demande de 50 tonnes d'acier, la fonction objectif est simplement le coût des matières premières utilisées:

$$\text{coût} = 200x_1 + 250x_2 + 150x_3 + 220x_4 + 300x_5 + 310x_6 + 165x_7,$$

où chaque matière première contribue pour son propre coût au total. Le problème d'optimisation est dès lors la minimisation de cette fonction coût sur tous les choix des variables qui satisfont les contraintes modélisées.

Il n'est plus possible ici d'énumérer les solutions possibles afin de résoudre le modèle, en particulier puisque les variables considérées sont continues. Nous pouvons néanmoins obtenir une intuition de la solution en considérant le comportement de la fonction objectif. Ainsi, il est évident que celle-ci décroît quand une des variables diminue, et que la contribution la plus faible en termes de coût vient des variables avec les plus petits coefficients (i.e. les matières premières avec les coûts moindres par unité). Si nous ignorons les contraintes de composition, le fournisseur devrait produire exactement 50 tonnes d'acier à partir des matières premières disponibles les moins chères. Ceci signifierait utiliser 50 des 60 tonnes disponibles d'hématite (au coût de \$150 par tonne), pour un coût total des \$7,500.

Avant d'essayer de résoudre le problème d'optimisation complet (à l'aide d'un ordinateur), nous devrions réécrire les contraintes de composition dans une forme plus simple. Par exemple, la contrainte 1.3.4 est nonlinéaire, mais peut être réexprimée comme deux contraintes linéaires en multipliant chaque terme des inégalités par le dénominateur. Après la simplification de toutes les contraintes de composition de cette manière, et en utilisant un logiciel d'optimisation, nous obtenons la solution

$$x_1 = 13.7888, \quad x_3 = 35.8097, \quad x_5 = 0.166667, \quad x_7 = 0.234818, \quad x_2 = x_4 = x_6 = 0,$$

qui se traduit en exactement 50 tonnes d'acier, produit à partir de 13.7888 tonnes de limonite, 35.8097 tonnes d'hématite, 0.166667 tonnes de silicone 1 et 0.234818 tonnes de charbon. Le coût total de production pour cette solution est \$8,217.96.

## 1.4 Algorithmes et logiciels

Au-delà de la modélisation, la résolution de problèmes de recherche opérationnelle nécessite de recourir à des algorithmes adaptés à la nature du problème, et capables de traiter de quelques dizaines à des millions de variables. Leur étude consistera par conséquent une partie importante du présent document. Même si de nombreux logiciels mettant en oeuvre ces algorithmes sont commerciaux, le monde de l'open-source n'est pas en reste avec notamment des projets tels que COIN-OR (<http://www.coin-or.org>). Il existe aussi diverses versions d'évaluations de solveurs commerciaux, ainsi que l'interface web NEOS (<http://www-neos.mcs.anl.gov>). L'utilisation de tels outils nécessitent toutefois l'apprentissage de langages de modélisation adaptés; dans ce cours, nous baserons sur le langage GAMS (<http://www.gams.com>). Ces langages servent à décrire dans des termes compréhensibles par le solveur le problème à résoudre. La dernière version de IOR-Tutorial, développé en Java et proposé en complément à Hillier et Lieberman [2], peut également se révéler un complément précieux pour se familiariser avec les techniques de recherche opérationnelle.

### 1.4.1 Un exemple avec GAMS

GAMS est l'acronyme de General Algebraic Modeling System. Il consiste en un langage de description de problèmes, qui peut être compilé, et en une interface vers différents solveurs. Une version gratuite de démonstration, permettant de résoudre des problèmes de petite taille, est disponible en téléchargement à l'adresse <http://www.gams.com>. Ce langage peut également être utilisé avec divers solveurs proposés sur NEOS. Nous reviendrons plus en détail ultérieurement sur la formulation d'un programme mathématique avec GAMS, et nous contenterons d'un petit exemple introductif à ce stade.

Considérons un brasseur qui dispose des éléments suivants dans son stock:

1. malt (75 kg);
2. houblon (60 kg);
3. levure (50 kg).

Deux produits peuvent être obtenus: de la bière légère et de la bière noire. Pour un kg de bière légère, il faut 2 kg de malt, 3 kg de houblon, et 2 kg de levure. Pour un kg de bière noire, il faut 3 kg de malt, 1 kg de houblon, et 5/3 kg de levure. La bière noire est vendue la moitié du prix de la bière légère. En supposant que toute la production sera vendue, le brasseur souhaiterait décider des quantités de bières noire et légère à produire pour optimiser son profit. Le programme GAMS résultant est

```

set b types of beer /light, dark/;

set i inputs /malt, hops, yeast/

parameter r(i) raw supplies /malt 75, hops 60, yeast 50/;

table a(i,b) input requirements

      light dark
malt  2      3
hops  3      1
yeast 2     1.67

parameter p(b) selling price / light 2, dark 1/;

variables pi profit (maximand)
          x(b) production level;

equations profit defines gross revenue
          supply(i) input supply constraint;

profit..    pi =e= sum(b, p(b) * x(b));
supply(i).. sum(b, a(i,b)*x(b)) =L= r(i);

model beer /all/;

x.lo(b) = 0;

solve beer using lp maximizing pi;
```

## 1.5 Notes

Le contenu des Sections 1.1 et 1.2 se base principalement sur Hillier et Lieberman [2], Chapitre 1. La Section 1.3 est construite à partir du Chapitre 1 de Levy [5]. L'exemple GAMS est dû à Thomas F. Rutherford.

“All right,” said Deep Thought. “The Answer to the Great Question. . .”  
The Hitchhiker’s Guide To the Galaxy

# 2

## Programmation linéaire

### 2.1 Introduction

Bien que la réalité soit souvent loin d’être linéaire, un grand nombre de problèmes peuvent s’écrire sous forme linéaire, soit directement, soit en première simplification. D’autre part, un très grand nombre de modèles constituent des extensions de programmes linéaires. Sa compréhension est essentielle à la compréhension de modèles plus sophistiqués.

Un programme linéaire générique s’écrit sous la forme

$$\begin{array}{ll} \max_x & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{t.q.} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{array}$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$\begin{array}{ll} \max_x & \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{t.q.} & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$

La ligne

$$\sum_{j=1}^n c_jx_j$$

représente la *fonction objectif*, que nous souhaitons maximiser. La maximisation se fait en respectant les  $m$  *contraintes*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sous forme matricielle, le problème se réécrit

$$\begin{array}{ll} \max_x & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b, \end{array}$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La terminologie “linéaire” vient du fait que toutes les fonctions impliquées sont linéaires. Typiquement, nous ajouterons également des contraintes de non-négativités:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ou, en abrégé,

$$x \geq 0.$$

Nous dirons aussi que le vecteur  $x$  appartient à l’orthant positif (i.e.  $x \in \mathcal{R}_+^n$ ).

**Exemple 3** (Wyndor Glass). *La compagnie Wyndor Glass Co. produit des produits verriers de haute qualité, incluant des fenêtres et des portes vitrées. Elle dispose à cette fin de trois usines (usine 1, usine 2, usine 3), qui ont chacune une capacité de production limitée. Les châssis en aluminium et les matériaux sont produits dans l’usine 1, les châssis en bois sont fabriqués dans l’usine 2, et l’usine 3 produit le verre et assemble les produits. La compagnie a décidé de mettre en place de ligne de production:*

- produit 1: une porte vitrée avec un châssis d’aluminium;
- produit 2: une fenêtre double-vitrage avec châssis en bois.

*Un lot de 20 unités donne lieu à un profit de \$3000 et \$5000, respectivement pour le produit 1 et le produit 2. Les données du problème sont synthétisées dans la Table 2.1. Chaque lot d’un produit est le résultat combiné de la*

	Produit 1 Temps de prod. (h)	Produit 2 Temps de prod. (h)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18

TABLE 2.1 – Données du problème Wyndor Glass

*production dans les trois usines. Nous souhaitons déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots par semaine) de façon à maximiser le profit total.*

*Les variables de décision sont*

- $x_1$ , le nombre de lots du produit 1;
- $x_2$ , le nombre de lots du produit 2.

*La fonction objectif est le profit total, qui vaut  $3x_1 + 5x_2$ , en l’exprimant en millier de dollars. Nous voulons maximiser ce profit.*

*Les contraintes concernent tout d’abord les capacités de production:*

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 && \text{(usine 1)} \\ 2x_2 &\leq 12 && \text{(usine 2)} \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 && \text{(usine 3)} \end{aligned}$$

*Viennent ensuite les contraintes de non-négativité:*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (\text{nombre positif d’unités produites})$$

En résumé, nous avons le problème d'optimisation suivant:

$$\max_x z = 3x_1 + 5x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 && (\text{usine 1}) \\ 2x_2 &\leq 12 && (\text{usine 3}) \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 && (\text{usine 3}) \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ (non-négativité)}$$

Avant de traiter de méthodes numériques, essayons de visualiser le problème afin de développer une intuition quant à sa résolution. Le problème peut-être représenté comme sur la Figure 2.1. Pour le réaliser, nous traçons d'abord les droites correspondant aux contraintes, puis nous déterminons le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chacune d'elle. Nous traçons ensuite les droites correspondant à la variation de l'objectif. Dans l'exemple

$$z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}z.$$

L'ordonnée à l'origine, dépendant de la valeur de  $z$ , est  $\frac{1}{5}z$ , et la pente vaut  $-\frac{3}{5}$ . Maximiser revient à augmenter  $z$ .

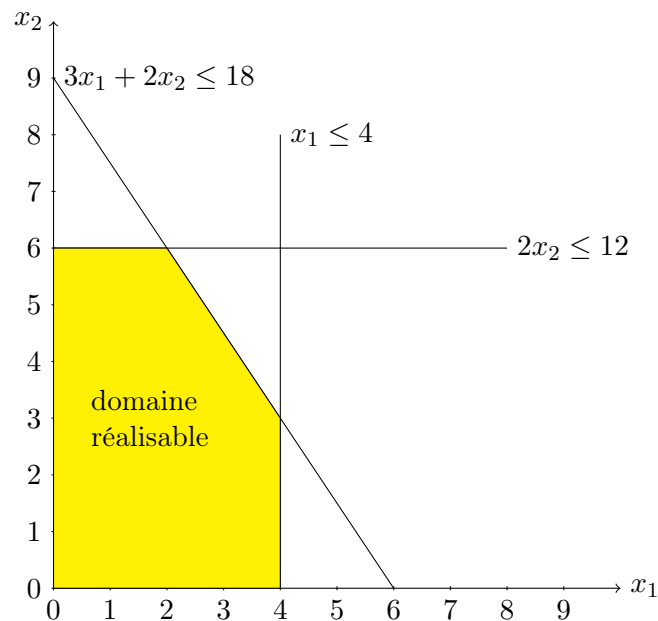


FIGURE 2.1 – exemple Wyndor Glass

La représentation graphique, bien qu'intéressante pour "voir" comment se passent les choses, ne fonctionne plus dès que nous avons plus de deux variables. Il faut alors passer à l'utilisation de logiciels, utilisant l'algorithme du simplexe ou de points intérieurs. Nous n'aborderons que le premier dans le cadre de ce cours introductif.

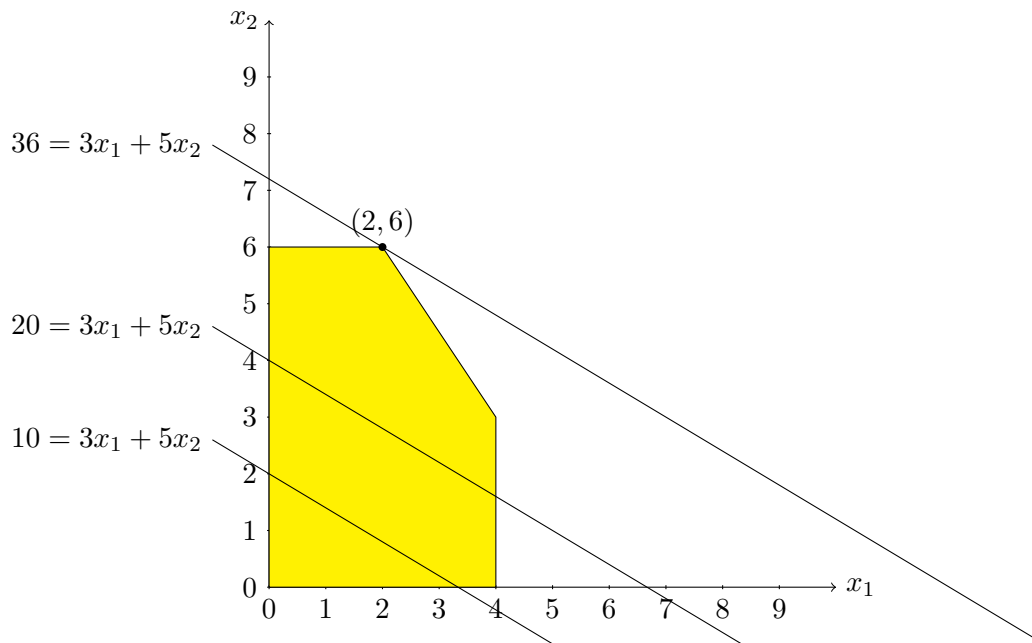


FIGURE 2.2 – exemple Wyndor Glass: maximisation

## 2.2 Modèle général de programmation linéaire

Le modèle complet

$$\begin{aligned} \max_x \quad & c^T x \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

est appelé *forme standard*. D'autres formes sont possibles et définissent aussi des modèles de programmation linéaire:

— minimiser au lieu de maximiser:

$$\min f(x) = -\max f(x);$$

— les inégalités peuvent être remplacées par des égalités, ou être de sens contraire;

— certaines variables peuvent ne pas être forcés à être supérieures à 0. Par exemple, considérons la contrainte

$$x \geq -4,$$

qui équivaut à

$$x + 4 \geq 0.$$

Nous pouvons alors définir  $y = x + 4$ , de sorte que la contrainte devient

$$y \geq 0.$$

De même, considérons

$$-10 \leq x \leq -2.$$

En définissant  $y = x + 10$ , nous avons les contraintes  $y \geq 0$ ,  $y \leq 8$ .



## 2.3 Terminologie de base

Nous parlerons de *solution réalisable* à propos d'une solution (i.e. une instance particulière du vecteur  $x$ ) pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites. En d'autres termes cette solution appartient au domaine réalisable. Par exemple, le point  $(1, 1)$  est une solution réalisable pour la Figure 2.1. A contrario, une solution non réalisable est une solution pour laquelle au moins une contrainte est violée. Elle n'appartient pas au domaine réalisable. Une *solution optimale* est une solution donnant la meilleure valeur possible pour l'objectif. Cette valeur est dite *valeur optimale*. Un modèle n'a aucune solution optimale si son domaine réalisable est vide, ou si la fonction objectif est non bornée. Ajoutons par exemple la contrainte

$$3x_1 + 5x_2 \geq 50$$

dans l'exemple Wyndor Glass. Cette nouvelle contrainte ne peut être satisfaite en même temps que les contraintes précédentes, comme illustré dans la Figure 2.3. Plus aucun point n'est réalisable. Si nous supprimons plutôt les contraintes

$$2x_2 \geq 12, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18,$$

la fonction objectif devient non bornée dans le domaine réalisable, comme illustré sur la Figure 2.4. Un modèle peut également présenter une infinité de solutions optimales. Considérons dans l'exemple la fonction objectif

$$z = 3x_1 + 2x_2.$$

Tout point sur le segment  $[(2, 6), (4, 3)]$  est alors solution optimale (voir Figure 2.5).

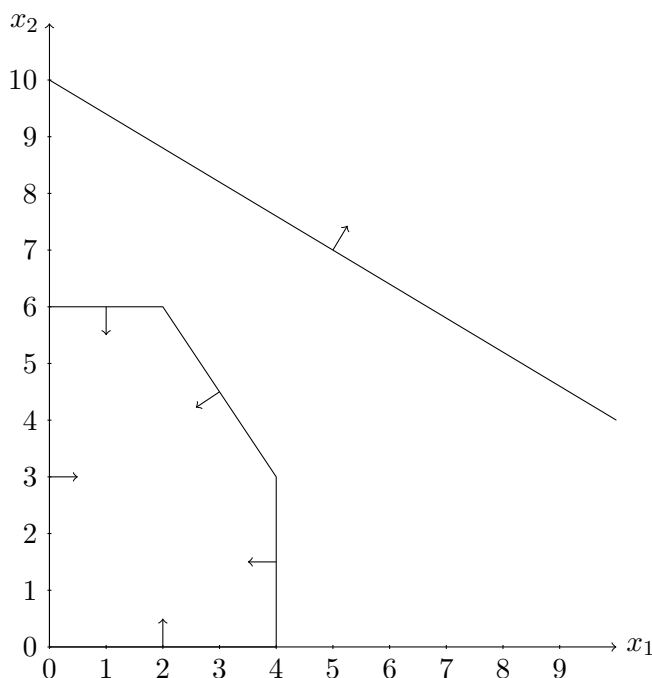


FIGURE 2.3 – exemple Wyndor Glass: domaine non réalisable

## 2.4 Hypothèses

La première hypothèse d'un modèle de programmation linéaire est la *proportionnalité*:

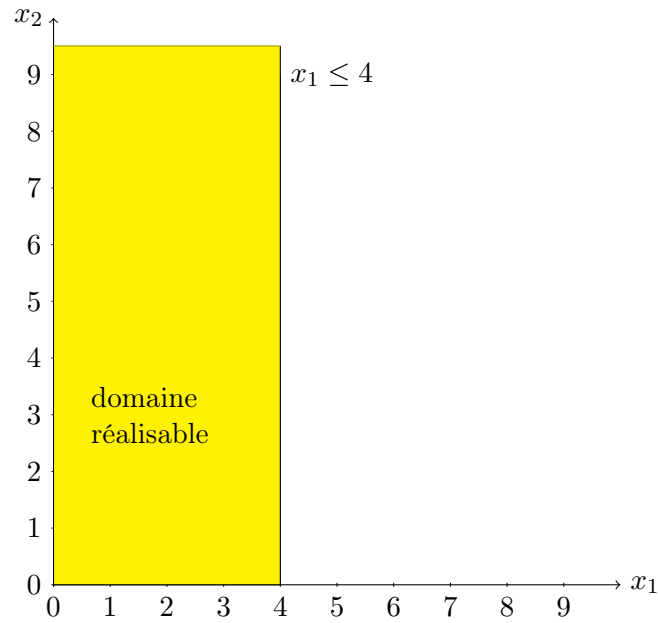


FIGURE 2.4 – exemple Wyndor Glass: objectif non borné

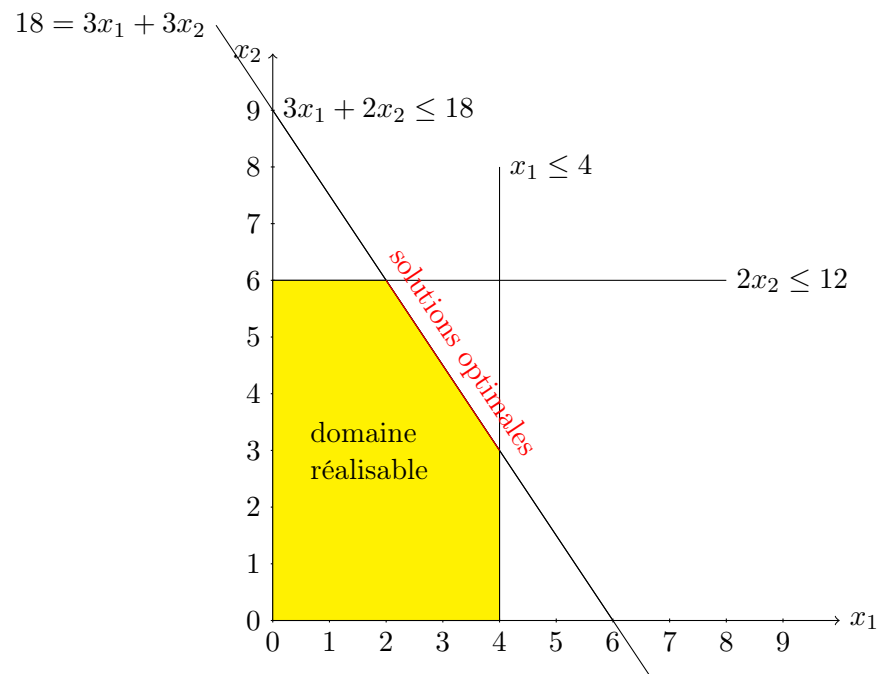


FIGURE 2.5 – exemple Wyndor Glass: infinité de solutions

- la contribution de chaque variable à la valeur de la fonction objectif est proportionnelle à la valeur de cette variable.
- la contribution de chaque variable au terme de gauche de chaque contrainte fonctionnelle est proportionnelle à la valeur de cette variable.

Des cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite sont

- coût fixe initial (Figure 2.6).
- profit marginal (profit par unité) croissant ou décroissant (Figure 2.7).

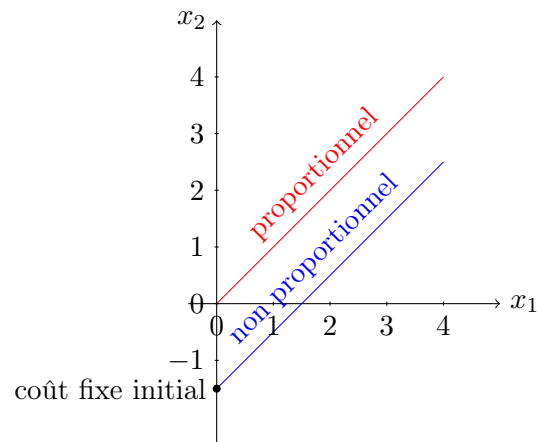


FIGURE 2.6 – coût fixe initial

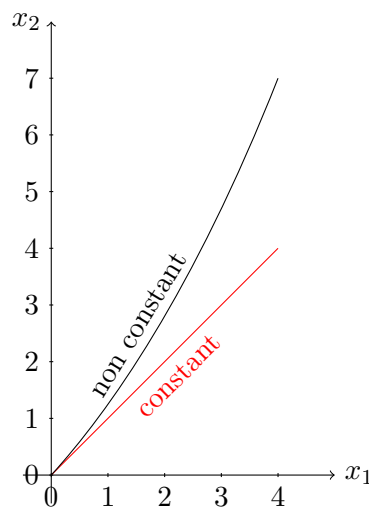


FIGURE 2.7 – profit marginal

Nous avons d'autre part la propriété d'additivité: la fonction objectif est composée de la somme des contributions individuelles de chaque variable, et le terme de gauche de chaque contrainte fonctionnelle est composé de la somme des contributions individuelles de chaque variable. L'additivité interdit les termes de la forme  $x_1x_2$ . Si une de ces hypothèses est invalidée, nous sommes en présence d'un programme non linéaire, étudié au Chapitre 3.

D'autre part, les variables sont continues. Si nous imposons des variables à valeurs entières, nous obtenons un modèle de programmation en nombres entiers (Chapitre 4). De plus, les valeurs affectées à chaque paramètre

sont des constantes connues avec certitude. Cette hypothèse peut être fort éloignée de la réalité. Nous pouvons tester cette hypothèse en conduisant une *analyse de sensibilité*, qui consiste à vérifier la sensibilité du modèle à des changements de valeurs des paramètres. Nous pouvons également introduire des variables aléatoires, ce qui conduit typiquement à un problème de programmation stochastique. La programmation stochastique dépasse cependant les objectifs du présent cours.

**Exemple 4** (Horaire de personnel). *Nous souhaitons établir un horaire quotidien, sachant que chaque jour est divisé en périodes et en supposant que nous avons pu estimer un nombre minimum d'employés devant être affecté durant chaque période. Chaque jour est divisé en quarts de travail de 8 heures. Plusieurs quarts partagent une même période, mais chaque quart exige un salaire particulier. Nous souhaitons savoir combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période. Les données du problème sont données dans la Table 2.2.*

Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	Minimum employés
6–8	X					48
8–10	X	X				79
10–12	X	X				65
12–14	X	X	X			87
14–16		X	X			64
16–18			X	X		73
18–20			X	X		82
20–22				X		43
22–24				X	X	52
0–6					X	15
Salaire	170	160	175	180	195	

TABLE 2.2 – données du problème d'horaire de personnel

Comme variables, nous pouvons choisir  $x_j$  comme le nombre d'employés affectés au quart  $j$ . L'objectif est

$$\min z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5.$$

Pour chaque période, le nombre d'employés affectés aux différents quarts doit couvrir le minimum d'employés requis pour cette période. Par exemple, pour la période de 14h à 16h, nous aurons:

$$x_2 + x_3 \geq 64.$$

Le programme linéaire résultant est

$$\begin{aligned} \min z &= 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5, \\ \text{s.c. } x_1 &\geq 48, \\ x_1 + x_2 &\geq 79 \\ x_1 + x_2 &\geq 65 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 87 \\ x_2 + x_3 &\geq 64 \\ x_3 + x_4 &\geq 73 \\ x_3 + x_4 &\geq 82 \\ x_4 &\geq 43 \\ x_4 + x_5 &\geq 52 \\ x_5 &\geq 15 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer la présence de contraintes redondantes:

- si nous avons  $x_1 + x_2 \geq 79$ , alors  $x_1 + x_2 \geq 65$ ; cette dernière contrainte est donc redondante et peut être éliminée;
- de même,  $x_3 + x_4 \geq 82$  implique  $x_3 + x_4 \geq 73$ ;
- les contraintes  $x_1 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 0$ ,  $x_5 \geq 0$ , sont aussi redondantes, mais il n'y a aucun intérêt à les éliminer.

La solution optimale du problème est

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (48, 31, 39, 43, 15).$$

Une difficulté est que le nombre d'employés doit toujours être entier, aussi l'hypothèse de continuité n'est pas satisfaite dans le modèle (bien que la solution optimale dans ce cas particulier soit entière).

**Exemple 5** (Réseau de distribution). Considérons deux usines ( $U_1$  et  $U_2$ ), un centre de distribution ( $CD$ ), et deux entrepôts ( $E_1$ ,  $E_2$ ). Chaque usine manufacture un certain nombre d'unités d'un même produit (offre). Chaque entrepôt requiert un certain nombre d'unités de ce même produit (demande). Sur chaque lien (arc) du réseau, il y a un coût de transport par unité de produit (coût unitaire). De plus, sur certains arcs, il y a une capacité sur le nombre d'unités transportées. Le réseau considéré est représenté dans la Figure 2.8. L'objectif est de minimiser le coût de transport total.

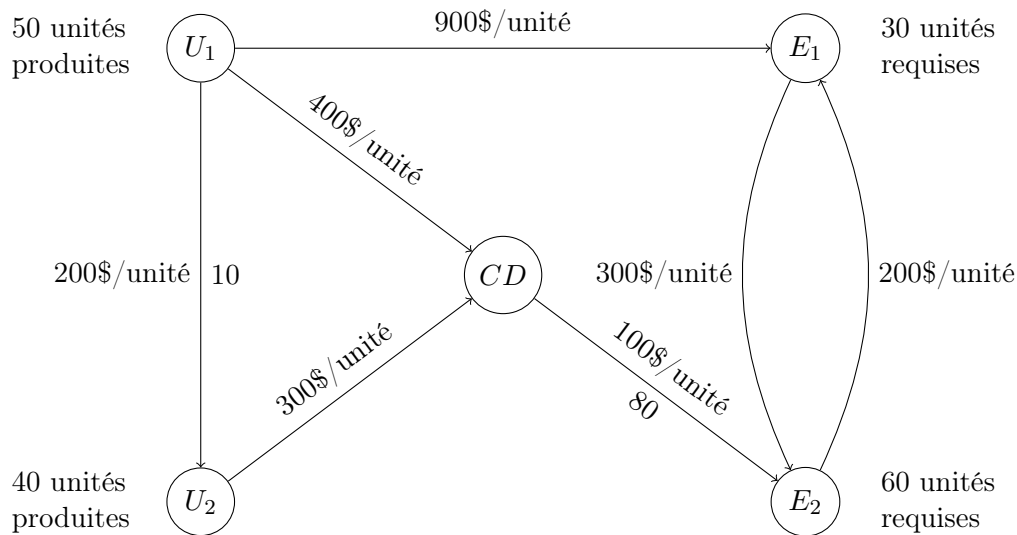


FIGURE 2.8 – Réseau de distribution

Comme d'ordinaire, pour formuler le modèle, identifions en premier lieu les variables d'intérêt. Nous désignerons par  $x_{i,j}$  le nombre d'unités du produit transportées sur l'arc  $(i,j)$  (i.e. entre les sommets  $i$  et  $j$ ). La fonction objectif (en chiffrant le montant total en centaines de dollars) est

$$\min z = 2x_{U_1,U_2} + 4x_{U_1,CD} + 9x_{U_1,E_1} + 3x_{U_2,CD} + x_{CD,E_2} + 3x_{E_1,E_2} + 2x_{E_2,E_1}.$$

Les contraintes concernent tout d'abord la conservation du flot: en chaque sommet du réseau, le flot sortant moins le flot entrant est égal au nombre d'unités produites dans le cas d'usine, l'opposé du nombre d'unités requises pour un entrepôt, et zéro pour le centre de distribution. Nous devons en outre tenir compte de la capacité sur certains arcs. Par exemple, pour l'arc  $(U_1, U_2)$ , nous avons

$$x_{U_1,U_2} \leq 10.$$

Il nous reste à préciser les traditionnelles contraintes de non-négativité:

$$x_{i,j} \geq 0.$$

Le modèle détaillé peut dès lors s'écrire de manière détaillée comme suit:

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_{U_1,U_2} + 4x_{U_1,CD} + 9x_{U_1,E_1} + 3x_{U_2,CD} + x_{CD,E_2} + 3x_{E_1,E_2} + 2x_{E_2,E_1}. \\
 \text{s.c. } x_{U_1,U_2} + x_{U_1,CD} + x_{U_1,E_1} &= 50, \\
 -x_{U_1,U_2} + x_{U_2,CD} &= 40, \\
 -x_{U_1,CD} - x_{U_2,CD} + x_{CD,E_2} &= 0, \\
 -x_{U_1,E_1} + x_{E_1,E_2} - x_{E_2,E_1} &= -30, \\
 -x_{CD,E_2} - x_{E_1,E_2} + x_{E_2,E_1} &= -60, \\
 x_{U_1,U_2} &\leq 10, \\
 x_{CD,E_2} &\leq 80, \\
 x_{U_1,U_2} \geq 0, x_{U_1,CD} \geq 0, x_{U_1,E_1} \geq 0, x_{U_2,CD} \geq 0, x_{CD,E_2} \geq 0, x_{E_1,E_2} \geq 0, x_{E_2,E_1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème de flot à coût minimum, que nous étudierons plus en détails au Chapitre 5. La solution optimale est

$$(x_{U_1,U_2}^*, x_{U_1,CD}^*, x_{U_1,E_1}^*, x_{U_2,CD}^*, x_{CD,E_2}^*, x_{E_1,E_2}^*, x_{E_2,E_1}^*) = (0, 40, 10, 40, 80, 0, 20).$$

Le nombre d'unités transportées doit toujours être une valeur entière, aussi l'hypothèse de continuité n'est pas satisfaite dans ce cas. Néanmoins, dans ce cas particulier, la solution trouvée est entière. En fait, pour tout problème de flot à coût minimum (avec paramètres à valeurs entières), il existe toujours une solution optimale entière.

## 2.5 La méthode du simplexe

Développée en 1947 par George Dantzig, la méthode du simplexe reste d'actualité pour résoudre des problèmes de grande taille. Il s'agit d'une méthode algébrique basée sur la résolution de systèmes d'équations linéaires; nous nous intéressons ici uniquement aux systèmes d'équations linéaires avec un nombre  $n$  de variables supérieur au nombre  $m$  d'équations:

$$Ax = b,$$

où  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $b \in \mathcal{R}^m$  et  $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ . Dans ce cas, il y a trois possibilités:

1. aucune solution;
2. une et une seule solution;
3. une infinité de solutions.

Nous supposons que toutes les variables sont positives. Le second cas, avec une et seule solution, ne peut survenir que si  $n = m$ , et si la matrice  $A$  est inversible, ce qui revient à exiger que nous avons éliminé au préalable toute équation pour s'écrire comme combinaison linéaire des autres équations. Si nous n'avons qu'une seule solution admissible, elle est forcément optimale, par conséquent, nous ignorerons ce cas dans le reste du chapitre, et prendrons  $n$  strictement supérieur à  $m$ .

Dans le cas où il y a une infinité de solutions, la méthode d'élimination de Gauss-Jordan permet d'identifier trois types de variables:

- variables fixées;
- variables dépendantes;
- variables indépendantes.

**Exemple 6** (Preliminaires à l'algorithme du simplexe). *Considérons le système*

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\
 x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\
 x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons le réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1, \\
 x_2 &= 1, \\
 x_3 - x_4 &= 2.
 \end{aligned}$$

La variable  $x_2$  est fixée, comme elle ne peut prendre que la valeur 1, sans considération pour les autres variables. A l'opposée,  $x_4$  est indépendante, comme elle peut prendre n'importe quelle valeur dans  $\mathcal{R}$ .  $x_1$  et  $x_3$  sont quant à elles dépendantes: le choix de  $x_4$  fixe leur valeur, et de plus, il n'est pas possible de les éliminer en combinant des équations entre elles (au contraire de  $x_4$ ).

### 2.5.1 Solution de base

Il s'agit de la solution obtenue en fixant toutes les variables indépendantes à zéro. Nous qualifierons de *variables hors-base* les variables indépendantes fixées à zéro. Les autres variables seront dites *variables de base*. Une solution de base est *réalisable* (ou *admissible*) lorsque toutes les variables de base ont une valeur positive. Une solution de base réalisable est *dégénérée* lorsqu'au moins une variable de base a la valeur 0. Il est possible de montrer qu'une solution de base réalisable est un sommet du polyèdre.

**Exemple 7** (Préliminaires à l'algorithme du simplexe: solution de base). *Dans l'exemple, la solution de base est*

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

*Elle est réalisable et non dégénérée.*

#### Pivot

Il est facile de changer le statut des variables par des opérations élémentaires.

**Exemple 8** (Préliminaires à l'algorithme du simplexe: pivot).

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & & & + & 2x_4 & = & 1, \\ & & x_2 & & & & = & 1, \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 2. \end{array}$$

*peut se réécrire comme*

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & & = & 5, \\ & x_2 & & & & & = & 1, \\ & & & -x_3 & + & x_4 & = & -2. \end{array}$$

*Dans cette nouvelle solution de base, nous avons*

- *variable hors-base:*  $x_3$  ;
- *variables de base:*  $x_1, x_2, x_4$  ;
- *solution de base non réalisable:*  $x_1 = 5, x_2 = 1, x_4 = -2$ .

Le pivot est une opération consistant à remplacer une variable de base par une variable hors base pour obtenir une nouvelle solution de base, dite *adjacente*.

**Exemple 9** (Wyndor Glass). *Rappelons que pour cet exemple, les contraintes fonctionnelles sont*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 4 \\ 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

*Au lieu d'inégalités, nous voudrions des égalités. Pour ce faire, nous ajoutons des variables d'écart (en anglais "slack variables") supérieures à 0:*

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & & +x_3 & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & +x_4 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & & +x_5 & = & 18 \end{array}$$

*Les variables hors-base sont  $x_1$  et  $x_2$ . Fixons-les à 0. Nous obtenons comme solution de base*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 12, 18).$$

Effectuons un pivot, en remplaçant la variable hors-base par une des variables de base actuelles. Reste à déterminer comment la choisir. Nous souhaitons en premier lieu que la nouvelle solution de base soit réalisable. Dans cette solution de base, on aura toujours  $x_1 = 0$ , et une des variables d'écart deviendra une variable hors-base, donc prendra la valeur 0. En exploitant le système linéaire précédent et la positivité des variables, nous avons

$$\begin{array}{rccccccc} x_1 & = & 4 & -x_3 & \geq & 0 & & 4 & & \geq & x_3 \\ x_4 & = & 12 & & -2x_2 & \geq & 0 & \Leftrightarrow & 12 & -2x_2 & \geq & 0 \\ x_5 & = & 18 & -3x_1 & -2x_2 & \geq & 0 & & 18 & -2x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

En exploitant les inégalités

$$\begin{aligned} x_4 &= 12 - 2x_2 \geq 0 \\ x_5 &= 18 - 2x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 12/2 = 6 \\ x_2 &\leq 18/2 = 9. \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant  $x_2 = 6$ , nous obtenons  $x_4 = 0$ , alors que si nous augmentons d'avantage  $x_2$ , la solution devient non réalisable. Nous effectuons comme pivot le remplacement de la variable de base  $x_4$  (qui deviendra hors-base) par  $x_2$ . Nous obtenons alors le système suivant:

$$\begin{array}{rccccccc} x_1 & & & +x_3 & & & = & 4 \\ & x_2 & & & +\frac{1}{2}x_4 & & = & 6 \\ 3x_1 & & & & -x_4 & +x_5 & = & 6, \end{array}$$

qui donne la solution de base:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 4, 0, 6).$$

Nous effectuons ensuite un pivot pour que la variable  $x_1$  entre dans la base (i.e. devienne une variable de base). Comme  $x_4 = 0$ ,

$$\begin{array}{rccccccc} x_3 & = & 4 & -x_1 & \geq & 0 & \Leftrightarrow & x_1 & \leq & 4 \\ x_5 & = & 6 & & -3x_1 & \geq & 0 & & x_1 & \leq & 2 \end{array}$$

En posant  $x_1 = 2$ , nous obtenons  $x_5 = 0$ . Le pivot revient à remplacer la variable de base  $x_5$  par  $x_1$ . Le système obtenu est alors :

$$\begin{array}{rccccccc} & x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 & = & 2 \\ & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & = & 6 \\ x_1 & & & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & = & 2 \end{array}$$

La solution de base correspondante est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0).$$

## 2.5.2 Interprétations

### Interprétation géométrique

Une solution de base réalisable correspond à un point extrême du domaine réalisable. Un pivot correspond à un déplacement d'un point extrême à un autre qui lui est *adjacente*, i.e. toutes les variables hors-base sauf une sont les mêmes. La méthode du simplexe peut se résumer comme suit.

1. Nous débutons avec une solution de base réalisable initiale (un *point extrême*).
2. A chaque itération, nous effectuons un pivot, passant ainsi à une solution de base réalisable adjacente (un *point extrême adjacent*).
3. L'algorithme s'arrête lorsqu'il identifie une solution de base réalisable optimale (un *point extrême* correspondant à une solution optimale).



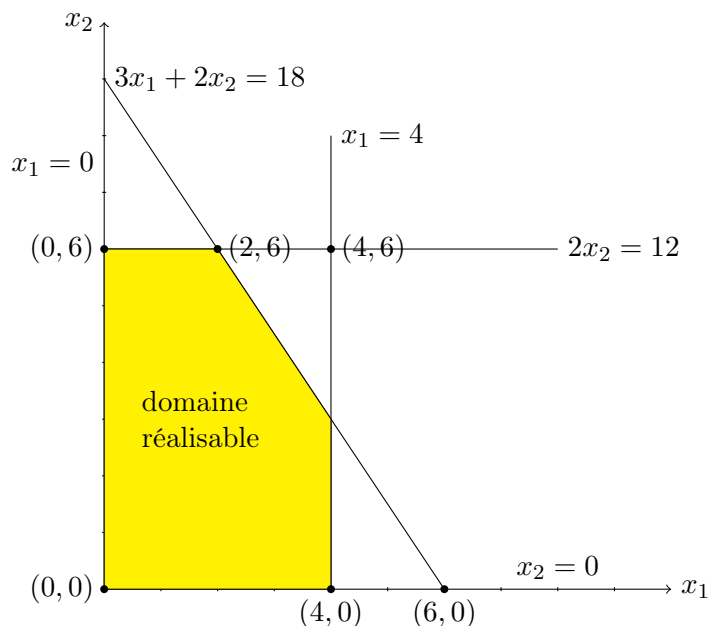


FIGURE 2.9 – exemple Wyndor Glass

### Interprétation des variables d'écart

**Exemple 10.** Dans la solution optimale du problème Wyndor Glass, nous avons  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = x_5 = 0$ . Cela indique que les deux dernières ressources (temps aux usines 2 et 3) sont pleinement utilisées. Une partie de la première ressource (temps à l'usine 1) n'est pas utilisée: 2 heures

### 2.5.3 Critère d'optimalité

**Exemple 11** (Wyndor Glass: critère d'optimalité). Exprimons l'objectif en fonction des variables hors-base dans la solution optimale. Rappelons que dans cette solution, nous avons

$$\begin{array}{rcl} x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 \\ x_1 & -\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = 2 \end{array}$$

Après substitution dans l'objectif, nous obtenons

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ &= 3\left(2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) + 5\left(6 - \frac{1}{2}x_4\right) \\ &= 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5. \end{aligned}$$

Toute solution réalisable  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  satisfait

$$z = 36 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{3}{2}x_4 - x_5 \leq 36.$$

Le critère d'optimalité s'énonce ainsi comme suit: étant donné que l'objectif s'exprime uniquement en fonction des variables hors-base de la solution de base réalisable courante, si les coefficients de ces variables dans l'objectif sont tous négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est optimale. Les coefficients des variables hors-base dans l'objectif sont appelés *coûts réduits* (ou coûts relatifs).

Si au moins un coût réduit est positif pour la solution de base courante, nous n'avons pas encore atteint une solution optimale. Il faut par conséquent effectuer au moins un pivot, mais quelle variable doit-on faire entrer dans la base. Regardons celle dont le coût réduit est le plus grand parmi toutes les variables hors-base, vu que cette variable fournit la plus grande augmentation marginale (par unité) de la valeur de l'objectif. Ce qui ne signifie toutefois pas la plus grande augmentation globale!

Vu que nous faisons entrer une variable dans la base, nous devons également choisir la variable qui va sortir de la base en tentant de garder toutes les variables non négatives. Supposons que  $x_j$  est la variable d'entrée. Chaque variable de base  $x_i$  s'exprime alors en fonction de la variable d'entrée (puisque les autres variables hors-base sont nulles):

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}x_j.$$

Dans cette expression, les coefficients  $\bar{b}_i$  et  $\bar{a}_{ij}$  sont obtenus suite à plusieurs pivots. Mais nous avons nécessairement  $\bar{b}_i$  positif (en partant d'un  $b$  positif). Pour que toutes les variables demeurent non négatives suite au pivot, nous devons avoir

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}x_j \geq 0,$$

soit, en d'autres termes,

$$\bar{a}_{ij}x_j \leq \bar{b}_i.$$

Si  $\bar{a}_{ij}$  est négatif, cette inégalité ne limite pas l'augmentation de  $x_j$ . Si cette condition est satisfaite pour tous les  $i$ , nous pouvons donc augmenter indéfiniment  $x_j$ ; l'objectif est non borné. Si  $\bar{a}_{ij}$  est strictement positif, l'inégalité limite l'augmentation de  $x_j$ . Nous prendrons comme variable de sortie celle qui atteint

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}.$$

**Algorithm 2.1:** Simplexe

1. Obtenir une solution de base réalisable.
2. Vérifier le critère d'optimalité: si les coûts réduits de toutes les variables hors-base sont négatifs ou nuls, stop.
3. Choisir la variable  $x_j$ , soit celle qui a le coût réduit le plus élevé.
4. Déterminer la variable de sortie:

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}.$$

5. Effectuer un pivot et déterminer une nouvelle solution de base réalisable. Retour à l'étape 2.

**Exemple 12** (Production). *Une entreprise fabrique quatre produits. La fabrication de chaque produit nécessite une certaine quantité de ressources. Les ressources consommées, les stocks des ressources et les bénéfices des produits sont récapitulés dans la Table 2.3. Nous souhaitons établir un plan de production de façon à maximiser le chiffre*

Produit	1	2	3	4	Stock
Ressource A	2	4	5	7	42
Ressource B	1	1	2	2	17
Ressource C	1	2	3	3	24
Profit	7	9	18	17	-

TABLE 2.3 – Données de production

*d'affaires.*

Soient  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  les quantités respectives de produits 1, 2, 3, 4. Nous avons le problème de programmation linéaire sous forme standard

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ \text{s.c. } 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &\leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Introduisons trois variables d'écart  $x_5, x_6, x_7$ , qui mesurent pour chaque ressource l'écart entre la quantité initialement disponible et la quantité consommée par le plan de fabrication donné par les variables de décision  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ \text{s.c. } 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 &= 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_7 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette formulation permet d'exprimer facilement les variables d'écart comme fonctions affines des variables de décision:

$$\begin{aligned} x_5 &= 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \\ x_6 &= 17 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_7 &= 24 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\ z &= 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessus est appelé un dictionnaire. Les variables  $x_5, x_6, x_7$  sont les variables de base et  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont des variables hors-base. La solution de base associée au dictionnaire est obtenue en donnant la valeur 0 à toutes les variables hors-base. La solution basique correspondant au dictionnaire ci-dessus est donc

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 42, 17, 24).$$

Le bénéfice correspondant est  $z = 0$ ; on ne produit rien, on ne consomme aucune ressource et on ne gagne rien. Néanmoins, c'est une solution réalisable, car elle satisfait toutes les contraintes.

En partant de cette solution basique, nous cherchons à améliorer le bénéfice. Nous sélectionnons la variable hors-base de coût réduit maximum, i.e.  $x_3$ , et gardons les autres variables hors-base à zéro. Il est évident que si on fait croître  $x_3$  à partir de 0, les autres variables hors-base restant nulles, la valeur de la fonction  $z$  croît. Nous cherchons à augmenter au plus la fonction objectif tout en gardant la solution reste réalisable. Les contraintes sur l'augmentation de  $x_3$  sont:

$$\begin{aligned} x_5 \geq 0 &\Rightarrow 42 - 5x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8.4 \\ x_6 \geq 0 &\Rightarrow 17 - 3x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8.5 \\ x_7 \geq 0 &\Rightarrow 24 - 3x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8. \end{aligned}$$

La plus restrictive de ces contraintes est  $x_3 \leq 8$ . L'interprétation géométrique est la suivante: en partant du sommet  $(0, 0, 0, 0)$  du polyèdre des contraintes, nous nous déplaçons sur une arête de ce polyèdre. Le premier hyperplan rencontré est  $x_7 = 0$ . Nous arrivons alors dans un nouveau sommet, à l'intersection des hyperplans  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_7 = 0$ .

Nous allons faire un changement de dictionnaire, i.e. un pivot, en échangeant les rôles de  $x_3$  et  $x_7$ . Nous utilisons la troisième équation du premier dictionnaire pour exprimer  $x_3$  en fonction de  $x_1, x_2, x_4$  et  $x_7$ :

$$x_3 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_4 - \frac{1}{3}x_7.$$

Nous remplaçons ensuite  $x_3$  par cette expression dans les autres équations du dictionnaire:

$$\begin{aligned}x_5 &= 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_7 - 2x_4 \\x_6 &= 1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_7 \\x_3 &= 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - x_4 \\z &= 144 + x_1 - 3x_2 - 6x_7 - x_4.\end{aligned}$$

La variable  $x_7$  est sortie de la base et la variable  $x_3$  est entrée dans la base. La nouvelle base est par conséquent  $x_5, x_6, x_3$ . La solution basique associée au nouveau dictionnaire est  $x_1 = x_2 = x_7 = x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = 1, x_3 = 8$ . Elle correspond au sommet de coordonnées  $(0, 0, 8, 0)$  du polyèdre de contraintes. Cette solution définit un plan de production beaucoup plus intéressant: nous fabriquons 8 unités du produit 3 ( $x_3 = 8$ ) en consommant entièrement la ressource C ( $x_7 = 0$ ). Il nous reste  $x_5 = 2$  unités de la ressource A et  $x_6 = 1$  unité de B. Le bénéfice est  $z = 144$ .

Dans la nouvelle expression de la fonction  $z$ , nous voyons que seule la variable  $x_1$  a un coefficient positif. Nous décidons de faire entrer  $x_1$  en base, et ainsi de parcourir une nouvelle arête du polyèdre des contraintes. Nous avons les limites suivantes sur l'augmentation de  $x_1$ :

$$x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 6x_6 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 24$$

d'où  $x_1 \leq 3$  Nous faisons sortir  $x_6$  de la base faisons entrer  $x_1$  à sa place. Nous obtenons le dictionnaire suivant:

$$\begin{aligned}x_5 &= 1 + x_6 - x_2 + x_7 - 2x_4 \\x_1 &= 3 - 3x_6 + x_2 + 2x_7 \\x_3 &= 7 + x_6 - x_2 - x_7 - x_4 \\z &= 147 - 3x_6 - 2x_2 - 4x_7 - x_4.\end{aligned}$$

La solution de base associée est  $x_6 = x_2 = x_7 = x_4 = 0, x_5 = 1, x_1 = 3, x_3 = 7$ , correspond au sommet  $(3, 0, 7, 0)$  du polyèdre des contraintes. Elle définit le plan de production suivant: nous fabriquons 3 unités du produit 1 et 7 unités du produit 3. Il ne nous reste qu'une unité de la ressource A. Le bénéfice est  $z = 147$ . De plus, tous les coûts réduits sont négatifs, aussi la solution est optimale.

## 2.5.4 Adaptation à d'autres formes de modèles

Tout modèle de programmation linéaire peut se ramener à la forme suivante:

$$\begin{aligned}\max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Nous supposons de plus que  $b_i$  est positif,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Sous cette forme, il est facile d'initialiser la méthode du simplexe en ajoutant des variables d'écart, et en les prenant comme variables de base. Cela revient de plus à considérer l'origine comme solution initiale, et il est facile d'effectuer les opérations de pivot. Le situation se complique avec d'autres formes fonctionnelles pour les contraintes, en particulier dans la recherche d'une solution de base initiale.

### Transformation du min au max

Supposons que nous devons minimiser l'objectif au lieu de le maximiser. Nous utilisons la propriété

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j = - \max - \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Nous résolvons le problème de maximisation en changeant les signes des coefficients dans l'objectif. La valeur optimale du problème de minimisation est l'opposé de celle du problème de maximisation.

### Transformation des inégalités en égalités

Si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ , il y a deux cas:

1.  $b_i \geq 0$ : nous ajoutons une variable d'écart positive  $x_{n+i}$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i.$$

2.  $b_i < 0$ : nous multiplions l'inégalité par -1, pour se ramener au cas développé ci-dessous.

Si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ , nous avons à nouveau deux cas possibles:

1.  $b_i \leq 0$ : nous multiplions l'inégalité par -1, pour se ramener au cas développé précédemment.
2.  $b_i > 0$ : nous soustrayons une variable de surplus positive  $x_{0i}$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{0i} = b_i.$$

Nous nous ramenons alors au cas d'ajout de variables artificielles.

### 2.5.5 Obtention d'une base admissible initiale

#### Ajout de variables artificielles

Si  $\sum_{j=1, \dots, n} a_{ij}x_j = b_i$  et qu'aucune variable n'est isolée (une variable est isolée si elle a coefficient 1 dans cette équation et à coefficient 0 dans les autres):

1. nous ajoutons une variable artificielle  $x_{n+1} \geq 0$ , dont l'unique but est de fournir une variable de base initiale pour cette contrainte;
2. nous lui associons un profil très négatif:  $-M$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1, \dots, n} c_j x_j - M x_{n+i} \\ \text{s.c.} \quad & \dots \\ & \sum_{j=1, \dots, n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \\ & \dots \end{aligned}$$

Le seul but des variables artificielles est de pouvoir initialiser l'algorithme du simplexe en produisant une solution de base réalisable initiale. Si le problème est réalisable, nous devrions avoir  $x_{n+i} = 0$ . Deux méthodes peuvent être considérées.

1. La *méthode du grand M* consiste à optimiser en utilisant une fonction objective formée de la fonction de coût initiale et de la somme, très fortement pénalisée, des variables artificielles.
2. La *méthode à deux phases* se déroule comme suit:

**Phase 1** Trouver une solution réalisable en minimisant la somme des variables artificielles.

**Phase 2** Optimiser en revenant à la fonction de coût initial à partir de la solution initiale trouvée dans la phase 1.

**Exemple 13.** *Considérons le programme*

$$\begin{aligned} \min z &= 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.c. } 0.3x_1 + 0.1x_2 &\leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 &= 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 &\geq 6 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

*Nous devons tout d'abord transformer le système de contraintes afin de pouvoir traiter un système linéaire:*

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_{s1} &= 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 &= 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_{s2} &= 6 \\ x_{s1} &\geq 0, x_{s2} \geq 0. \end{aligned}$$

*En ajoutant les variables artificielles, nous obtenons*

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_{s1} &= 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_{a2} &= 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_{s2} + x_{a3} &= 6 \\ x_{s1} &\geq 0, x_{s2} \geq 0, x_{a2} \geq 0, x_{a3} \geq 0. \end{aligned}$$

*Afin de démarrer la méthode du simplexe, nous appliquons une des deux méthodes précédentes. Méthode à deux phases:*

**Phase 1** *minimiser  $x_{a2} + x_{a3}$  jusqu'à obtenir une valeur optimale nulle (si le programme linéaire à une solution réalisable).*

**Phase 2** *minimiser  $0.4x_1 + 0.5x_2$ .*

*Méthode du grand M:*

$$\min 0.4x_1 + 0.5x_2 + Mx_{a2} + Mx_{a3}$$

## 2.5.6 Variables à valeurs quelconques

Si une variable  $x_j$  peut prendre des valeurs négatives, nous introduisons deux variables  $x_j^+ \geq 0$  et  $x_j^- \geq 0$ . Nous posons alors

$$x_j = x_j^+ - x_j^-.$$

Une autre possible, si  $x_j \geq L_j$ , où  $L_j$  est une constante négative, consiste à poser

$$x_j^+ = x_j - L_j \geq 0.$$

## 2.6 Dualité

### 2.6.1 Motivation

**Exemple 14** (Wyndor Glass: dualité). *Supposons qu'une compagnie partenaire de Wyndor Glass, appelée Dual Glass, aimerait louer du temps aux usines afin de fabriquer des lots de produits. Quel prix horaire pour chaque usine devrait-elle demander de telle sorte que le résultat soit équitable, soit aucun profit ni perte pour aucun des deux partenaires ?*

*Dénotons les nouvelles variables de décision par  $y_i$ , le prix de location horaire à l'usine  $i$ , et reprenons les données du problème telles qu'exprimé précédemment dans la Table 2.1.*

	Produit 1 Temps de prod. (h)	Produit 2 Temps de prod. (h)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18

Dual Glass cherche à minimiser le prix total qu'elle devra payer pour le temps loué aux trois usines. Le prix total pour chaque usine peut être exprimé comme

$$\text{temps de production maximum (h)} \times \text{prix}$$

pour louer du temps (\$/h). L'objectif est par conséquent

$$\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3.$$

Les contraintes assurent que le prix total associé à la fabrication d'un lot de chaque produit ne doit pas être inférieur au profit (\$/lot) qu'en retire Wyndor Glass. Le prix total associé à un produit peut être exprimé comme le temps consacré à la production de chaque lot (h/lot) multiplié par le prix pour louer du temps (\$/h). La contrainte associée au produit 1 peut s'exprimer comme

$$y_1 + 3y_3 \geq 3.$$

La contrainte associée au produit 2 est

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5.$$

Nous obtenons ainsi le modèle pour Dual Glass, appelé modèle dual:

$$\begin{aligned} \min w &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{s.c. } y_1 + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Pour rappel, le modèle pour Wyndor Glass, dit modèle primal est

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c. } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

Rappelons que pour la solution de base optimale du problème Wyndor Glass, l'objectif s'écrit:

$$z = 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5.$$

$x_4$  et  $x_5$  sont les variables hors base et les coefficients  $-\frac{3}{2}$  et  $-1$  sont leurs coûts réduits. Si on augmente la valeur de  $x_4$  de une unité, le profit diminue de  $\frac{3}{2}$ .  $x_4$  est également la variable d'écart associée à la contrainte de ressource pour l'usine 2:

$$2x_2 + x_4 = 12.$$

Augmenter  $x_4$  d'une unité signifie par conséquent diminuer le terme de droite correspondant de 1. En effet, si Wyndor Glass loue à Dual Glass une heure de temps de production à l'usine 2:

- la capacité à l'usine 2 diminue de 1 heure (diminution d'une unité du terme de droite);
- la valeur de l'objectif diminue de  $\frac{3}{2}$ .

Pour retrouver un profit total égal, il faudra donc demander un prix de  $\frac{3}{2}$  (1500\$) pour chaque heure de temps louée à l'usine 2. De manière générale, la solution optimale du dual est donnée par l'opposé des coûts réduits des variables d'écart (aussi appelés multiplicateurs optimaux, ou shadow prices en anglais). Dans notre exemple:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{2}, \quad y_3 = 1.$$

Le prix de la variable  $y_1$  est fixé à 0:

- Wyndor Glass n'exige rien pour une heure louée à l'usine 1, ce qui se justifie par le fait qu'il lui reste du temps de production non utilisé (la variable d'écart  $x_3$  est strictement positive).
- Un prix strictement positif ferait augmenter le profit, et la solution ne serait plus équitale.

Les prix des autres variables est strictement positif:

- puisque le temps de production est utilisé pleinement, louer une heure à Dual Glass revient à perdre une heure de production, donc à réduire le profit total;
- pour retrouver le même profit, il faut exiger un prix égal au multiplicateur optimal, égal à l'opposé du coût réduit.

Nous pouvons constater des écarts complémentaires: pour tout  $i$ , nous avons

$$x_{n+i} \cdot y_i = 0.$$

Tout modèle de programmation linéaire possède un dual. A tout programme linéaire sous forme standard

$$\begin{aligned} \max z &= c^T x \\ \text{s.c. } Ax &\leq b, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

nous associons le programme dual

$$\begin{aligned} \min w &= b^T y \\ \text{s.c. } A^T y &\geq c, \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi un couple primal-dual, avec les relations suivantes entre les deux modèles.

<b>Primal</b>	<b>Dual</b>
Variable	Contrainte
Contrainte	Variable
max	min
Profit unitaire	Terme de droite
Terme de droite	Coût unitaire
Ligne	Colonne
Colonne	Ligne
Contrainte $\leq$	Contrainte $\geq$

Si un modèle de programmation linéaire possède une solution optimale, il en est de même pour son dual, et les valeurs optimales des deux modèles sont égales.

La solution optimale du dual correspond aux multiplicateurs optimaux. Nous pouvons les lire directement dans le tableau optimal du simplexe: ce sont les coefficients dans la ligne correspondant à l'objectif. Le coût réduit (correspondant à l'opposé du coefficient dans la ligne de l'objectif) mesure la variation de l'objectif entraîné par une augmentation d'une unité de la valeur de la variable hors-base associée.

### 2.6.2 Analyse de sensibilité

En général, le coût réduit d'une variable hors-base indique le changement dans l'objectif apporté par une augmentation d'une unité de la valeur de cette variable. Pour les variables d'écart, ce principe peut se formuler ainsi: le coût réduit d'une variable d'écart hors-base indique le changement dans l'objectif apporté par une diminution d'une unité du terme de droite associé. Ceci est un exemple d'analyse de sensibilité: un paramètre (ici, un terme de droite) est modifié et nous mesurons la sensibilité de la solution optimale à ce changement.

Nous pouvons aussi mesurer la sensibilité de la solution optimale à un changement d'un terme de droite ou d'un coefficient dans l'objectif en résolvant à nouveau le modèle modifié.

**Exemple 15** (Wyndor Glass: sensibilité). *Une analyse de sensibilité complète nous apprendrait ce qui suit.*



- Les multiplicateurs optimaux (Shadow Prices) sont 0, 1500 et 1000.
- La capacité à l'usine 3 peut prendre n'importe quelle valeur entre 12h et 24h sans changer la solution optimale du dual.
- Le profit unitaire pour le produit 1 peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 7500\$ sans changer la solution optimale du primal.

**Exemple 16.** *Considérons un fermier cultivant trois types de plantes (maïs, blé, coton), en utilisant des ressources de terre et de main d'oeuvre. Les revenus nets venant de la culture du maïs, du blé et du coton sont de \$109/acre, \$90/acre et \$115/acre, respectivement. Un acre de maïs exige 6 heures de travail, un acre de blé, 4 heures, et un acre de coton, 8 heures. Le fermier a à disposition 100 acres de terre et 500 heures de travail; il souhaite maximiser le revenu net de ses plantations.*

*Nous obtenons le programme mathématique linéaire*

$$\begin{aligned} \max z &= 109x_1 + 90x_2 + 115x_3 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 100, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\leq 500, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

*ce qui peut se traduire en GAMS comme suit:*

## SETS

Crop	Crop production
/ Corn	Corn production
Wheat	Wheat production
Cotton	Cotton production /
Resource	Elément de ressources utilisées dans le modèle
/ Land	Land used by crop
Labor	Labord used by crop /;

## VARIABLES

Profit	Net income from crops;
--------	------------------------

## POSITIVE VARIABLES

Production(Crop)	Production by crop;
------------------	---------------------

SCALAR LandAvailable Total Land / 100 /;

## PARAMETER

Revenue(Crop)	Revenues from crop production
/ Corn	109
Wheat	90
Cotton	115 /

ResourceAvailable(Resource)	Resource availability
/ Land	100
Labor	500 /;

TABLE ResourceUse(Resource, Crop) Resource used in the model

	Corn	Wheat	Cotton	
Land	1	1	1	
Labor	6	4	8	;

## EQUATIONS

Objective Maximimize farm income  
 ResourceEq(Resource) Resource Constraint;

Objective..

Profit =E= SUM(Crop, Revenue(Crop)\*Production(Crop));

ResourceEq(Resource)..

SUM(Crop, ResourceUse(Resource,Crop)\*Production(Crop))  
 =L= ResourceAvailable(Resource);

MODEL FarmIncome /ALL/;

SOLVE FarmIncome USING LP MAXIMIZING Profit;

*L'exécution de GAMS sur ce fichier donne*

---- EQU ResourceEq Resource Constraint

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
Land	-INF	100.000	100.000	52.000
Labor	-INF	500.000	500.000	9.500

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
--	-------	-------	-------	----------

---- VAR Profit	-INF	9950.000	+INF	.
-----------------	------	----------	------	---

Profit Net income from crops

---- VAR Production Production by crop

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
Corn	.	50.000	+INF	.
Wheat	.	50.000	+INF	.
Cotton	.	.	+INF	-13.000

*La première partie de cet extrait indique que les deux contraintes, sur la terre et la main d'oeuvre, sont actives: toutes les ressources sont employées. Les variables duales optimales correspondantes peuvent par conséquent être non-nulles, et représentent la valeur marginale de ces contraintes (actives). Nous voyons en particulier ici que la terre a la plus grande valeur marginale.*

*La seconde partie donnent les quantités de plantes cultivées. Seuls le maïs et le blé sont produits, mais pas le coton. Le dual contient trois contraintes comme nous avons trois variables primales. Il est facile de vérifier que les deux premières contraintes sont actives, mais pas la troisième, mais dépasse la borne inférieure de 13 unités.*

*Nous pouvons obtenir les valeurs des variables d'écart avec la ligne*

OPTION SOLSLACK = 1;

*avant la commande SOLVE, ce qui dans cas confirme que les contraintes sont actives.*

	LOWER	SLACK	UPPER	MARGINAL
Land	-INF	.	100.000	52.000
Labor	-INF	.	500.000	9.500

*Si nous ajoutons la commande*

```
DISPLAY Profit.L, Production.L, ResourceEq.M, ResourceUse;
```

*nous obtenons en sortie:*

```
----      53 VARIABLE Profit.L              =      9950.000  Net income from crops
```

```
----      53 VARIABLE Production.L  Production by crop
```

```
Corn  50.000,    Wheat  50.000
```

```
----      53 EQUATION ResourceEq.M  Resource Constraint
```

```
Land  52.000,    Labor  9.500
```

```
----      53 PARAMETER ResourceUse  Resource used in the model
```

	Corn	Wheat	Cotton
Land	1.000	1.000	1.000
Labor	6.000	4.000	8.000

*La syntaxe .L conduit à obtenir les valeurs optimales des variables primales (ou de la solution) quand appliqué à une variable, et la valeur du terme de gauche d'une équation de contrainte, quand à appliqué à une contrainte. La syntaxe .M permet d'obtenir le multiplicateur optimal associée à une équation, si appliqué à une équation. Dans le cas d'une variable, il nous permet de connaître la valeur excédentaire pour la contrainte duale associée.*

## 2.7 Notes

Ce chapitre se base essentiellement sur les notes de cours de Bernard Gendron, 2007. L'exemple 3 est tiré de Hillier et Lieberman [2], Section 3.1. L'exemple de production est dû à Stefan Balev.



# 3

## Programmation non linéaire

Nous pouvons généraliser le programme linéaire introduit au chapitre précédent comme suit:

$$\begin{aligned} \max_x & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.c.} & g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m. \end{aligned}$$

Si  $f$  et  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont linéaires, nous retrouvons le programme linéaire précédemment introduit, mais il n'existe pas de raison de se limiter à de tels cas.

En général, nous supposons aussi que toutes ces fonctions sont deux fois dérivables.

### 3.1 Fonctions convexes et concaves

Soient  $a$  et  $b$  deux points dans  $\mathcal{R}^n$ . Le segment de droite joignant ces deux points est l'ensemble des points

$$\{x \in \mathcal{R}^n \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } x = a + \lambda(b - a) = \lambda b + (1 - \lambda)a\}.$$

Une fonction est *convexe* si tout point sur le segment de droite joignant  $f(a)$  et  $f(b)$  se trouve au-dessus du graphe de  $f$ :

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a), \quad (3.1.1)$$

pour toute paire de points  $(a, b)$ . Si cette inégalité est stricte, la fonction  $f$  est dite *strictement convexe*. En remplaçant le sens de l'inégalité dans (3.1.1), la fonction  $f$  est dite *concave*:

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \geq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a),$$

pour toute paire  $(a, b)$ . Si cette dernière inégalité est stricte, la fonction  $f$  est *strictement concave*. La Figure 3.1 illustre une fonction strictement convexe et une fonction strictement concave.

#### Tests de convexité et de concavité

Supposons que  $f$  est une fonction deux fois dérivable d'une seule variable. Alors,

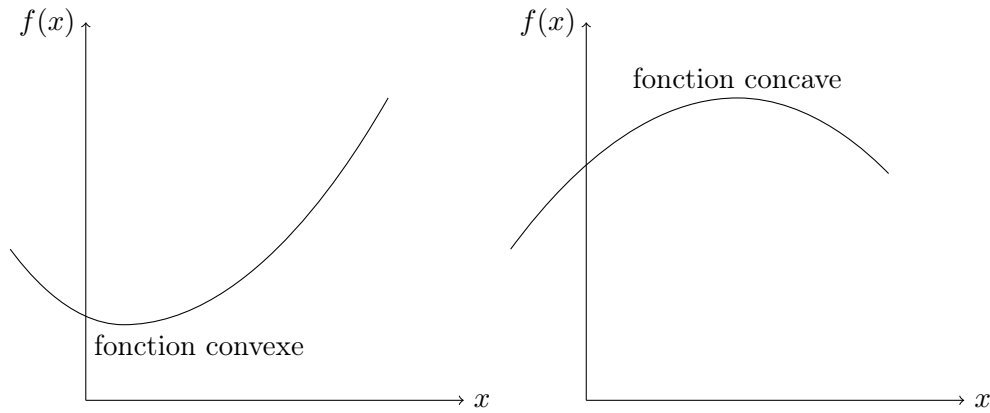


FIGURE 3.1 – Fonctions convexe et concave

1.  $f$  est convexe si et seulement si

$$\forall x, \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0;$$

2.  $f$  est strictement convexe si

$$\forall x, \frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0;$$

3.  $f$  est concave si et seulement si

$$\forall x, \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0;$$

4.  $f$  est strictement concave si

$$\forall x, \frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0.$$

Supposons que  $f$  est une fonction deux dérivable de deux variables. Dans ce cas, nous utilisons la Table 3.1 comme conditions nécessaires.

	Convexe	Strict. convexe	Concave	Strict. concave
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}$	$\geq 0$	$> 0$	$\leq 0$	$< 0$
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$	$\geq 0$	$> 0$	$\leq 0$	$< 0$
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_2, x_2)}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 x_2} \right)^2$	$\geq 0$	$> 0$	$\geq 0$	$> 0$

TABLE 3.1 – Test de convexité et de concavité pour une fonction à deux variables deux fois dérivable

Ces tests se généralisent à des fonctions de plus de deux variables en utilisant le Hessien (la matrice des dérivées secondes). Deux résultats supplémentaires sont utiles pour tester la convexité:

- une fonction qui s'exprime comme la somme de fonctions convexes (concaves) est convexe (concave);
- l'opposé d'une fonction concave est convexe et vice-versa.

### 3.1.1 Ensembles convexes

Un ensemble est convexe si, pour toute paire de points de l'ensemble, le segment de droite joignant ces points est contenu dans l'ensemble. Il est possible de démontrer qu'un ensemble est convexe grâce aux propriétés suivantes:

- si  $f$  est convexe, alors  $\{x \mid f(x) \leq b\}$  est convexe;

- si  $f$  est concave, alors  $\{x \mid f(x) \geq b\}$  est convexe;
- l'intersection d'ensembles convexes est convexe.

**Exemple 17** (Wyndor Glass). *Modifions l'exemple Wyndor Glass en remplaçant certaines contraintes par une contrainte non linéaire.*

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c. } x_1 &\leq 4 \\ 9x_1^2 + 5x_2^2 &\leq 216 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Le problème ainsi modifié peut se représenter comme sur la Figure 3.2. Remarquons que l'objectif est concave (car

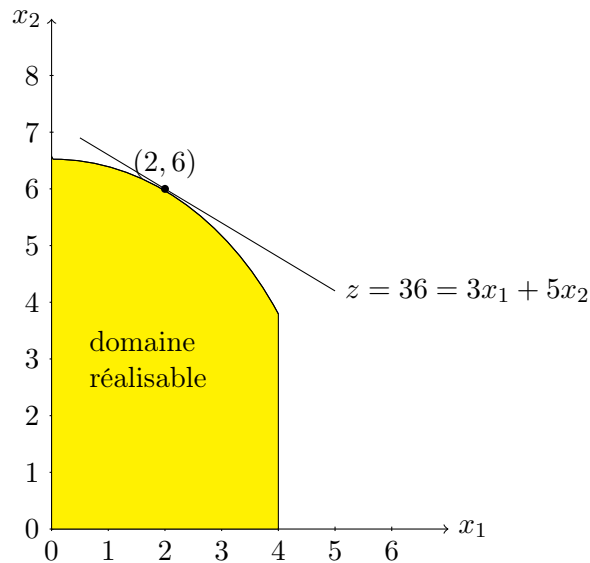


FIGURE 3.2 – exemple Wyndor Glass

linéaire) et que le domaine réalisable est convexe: c'est un modèle de programmation convexe. Dans le cas présent, la solution optimale est sur la frontière du domaine réalisable, mais ne correspond pas à un coin (l'intersection de deux contraintes).

Modifions encore l'exemple Wyndor Glass, mais cette fois en remplaçant l'objectif linéaire par une fonction non linéaire, comme illustré sur la Figure 3.3:

$$\begin{aligned} \max z &= 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

Nous pouvons à nouveau remarquer que l'objectif est concave et que le domaine réalisable est convexe: c'est aussi un modèle de programmation convexe. Ici, la solution optimale  $(8/3, 5)$  est sur la frontière du domaine réalisable, mais ne correspond pas à un point extrême du domaine réalisable.

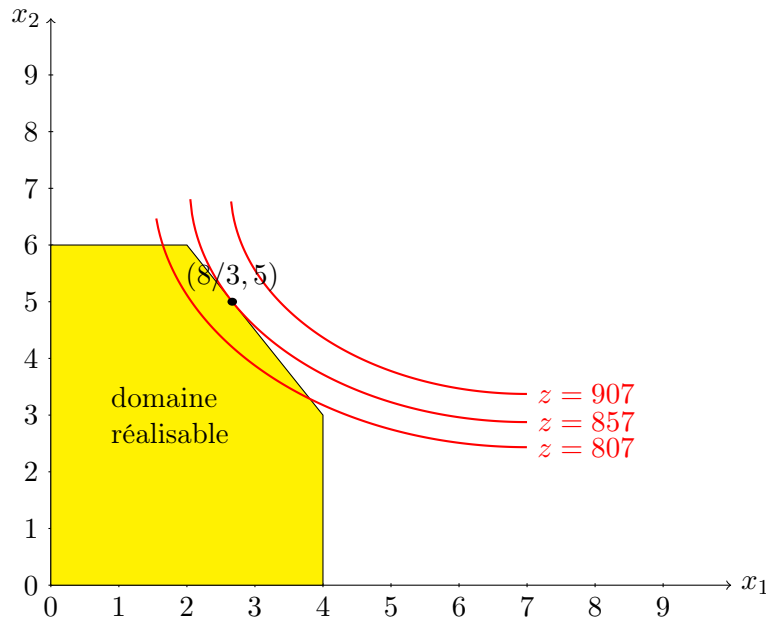


FIGURE 3.3 – exemple Wyndor Glass - cas 2

Considérons le même exemple, mais avec une fonction objectif différente, tel que représenté sur la Figure 3.4:

$$\begin{aligned} \max z &= 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

Il s'agit à nouveau d'un modèle de programmation convexe, avec comme solution optimale  $(3, 3)$ , laquelle se trouve à l'intérieur du domaine réalisable. La fonction objectif est la somme de deux fonctions d'une seule variable. Si nous annulons les dérivées de chacune de ces fonctions, nous obtenons la solution unique  $(3, 3)$ , qui se trouve à l'intérieur du domaine; c'est donc nécessairement la solution optimale.

Revenons sur la fonction objectif initiale, mais introduisons une contrainte non-linéaire, qui définit un domaine réalisable non-convexe, comme illustré sur la Figure 3.5:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c. } x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 7 \\ 8x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2 &\leq 49 \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Le problème ainsi modifié peut se représenter comme sur la Figure 3.5. Dans ce modèle de programmation non convexe, nous remarquons la présence de deux maxima locaux:

- $x$  est un maximum local si  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $a$  réalisable suffisamment près de  $a$ ;
- $(4, 3)$  et  $(0, 7)$  sont des maxima locaux, mais  $x^* = (0, 7)$  est la maximum global:  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $a$  réalisable.

Les méthodes classiques de programmation non-linéaire permettent d'identifier un maximum local, mais pas nécessairement le maximum global, alors qu'en programmation convexe, tout maximum local est global.



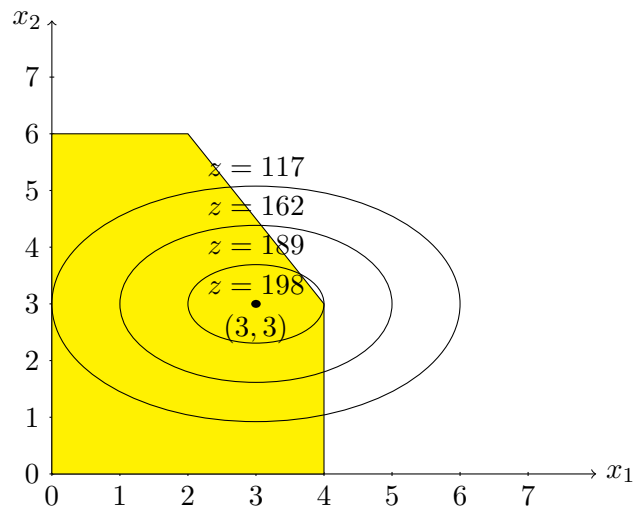


FIGURE 3.4 – exemple Wyndor Glass - cas 3

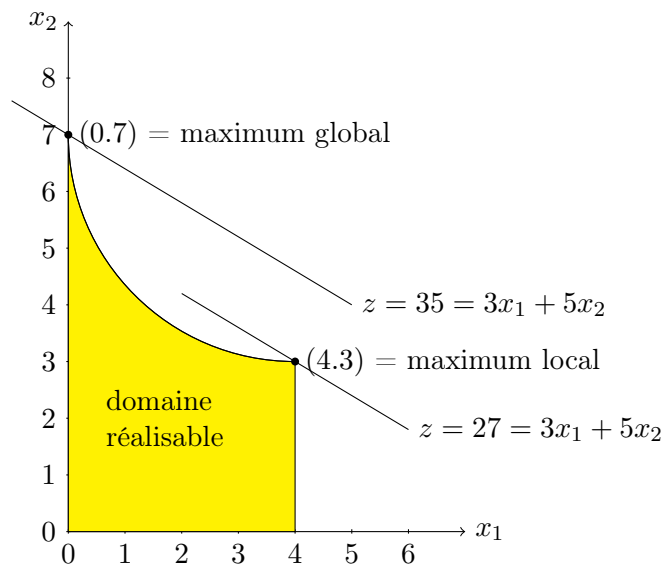


FIGURE 3.5 – exemple Wyndor Glass - cas 4

## 3.2 Algorithmes

### 3.2.1 L'algorithme du simplexe dans le cas non-linéaire

Le succès de l'algorithme du simplexe en programmation linéaire a naturellement motivé le développement de techniques similaires pour l'optimisation non-linéaire. Une telle approche fut proposée en par Nelder et Mead [7]. Néanmoins, la notion de point extrême est beaucoup plus délicate à exploiter en non-linéaire, en particulier en l'absence de contraintes. Il convient de construire un polyèdre artificielle, ce qui n'est pas immédiat, et en pratique, la méthode souffre de l'absence de garantie de convergence, excepté pour des fonctions convexes à une variable [4]. Nous pouvons même observer une convergence vers un point non-stationnaire [6]. Un algorithme d'optimisation sans garantie de convergence est appelé *heuristique*. Cette méthode est pourtant encore fréquemment employée, en particulier par les ingénieurs. La fonction `fminsearch` de Matlab<sup>1</sup> implémente ainsi cet algorithme. Malgré ce succès, aucun algorithme d'optimisation non-linéaire moderne ne se fonde sur le simplexe, et il convient dès lors d'éviter autant que possible de maintenir un tel usage. De meilleurs résultats seront obtenus en employant des outils plus appropriés.

### 3.2.2 Optimisation sans contrainte

Considérons tout d'abord le cas d'un modèle de programmation non-linéaire dans lequel il n'y a aucune contrainte:

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Il est alors possible de montrer que si  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est un maximum local, alors

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En d'autres mots, lorsque la dérivée s'annule en un point donné, ce point *peut être* un maximum local, mais l'inverse n'est pas nécessairement vérifié: ce point peut aussi être un minimum local ou un point de selle. Par contre, si  $f$  est concave, un point où la dérivée s'annule est nécessairement un maximum global. De plus, si  $f$  est strictement concave, un tel maximum global est unique.

Dans le cas d'une fonction non concave, afin de trouver un maximum global, il faut

- identifier tous les maxima locaux;
- identifier celui de plus grande valeur;
- vérifier que la fonction est bornée supérieurement (sinon, il n'y a pas de maximum global).

Le problème est qu'identifier tous les maxima locaux peut être extrêmement difficile.

### 3.2.3 Méthode de la bisection

Considérons en premier lieu le cas le plus simple: la fonction objectif  $f$  est concave et comporte une seule variable. Il est alors possible de montrer que, si  $x^*$  est une solution optimale et il existe  $x^i$  et  $x^u$  tels que  $x^i \leq x^* \leq x^u$  et  $f(x^i) \neq f(x^*)$ ,  $f(x^u) \neq f(x^*)$ , alors il existe  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq x^* \leq b$  et

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &> 0, \text{ si } x < a, \\ \frac{df(x)}{dx} &= 0, \text{ si } x = x^*, \\ \frac{df(x)}{dx} &< 0, \text{ si } x > b. \end{aligned}$$

Si  $f$  est strictement concave en  $x^*$ , alors  $a = x^* = b$ , comme illustré sur la Figure 3.6.

---

1. Nous nous référons ici à la version 7.9, Release 2009b, mise en circulation le 4 septembre 2009.

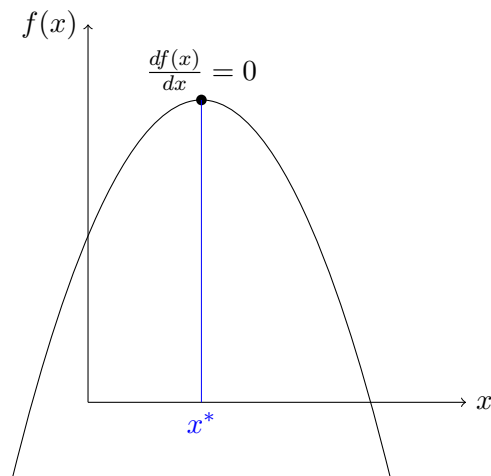


FIGURE 3.6 – Maximum d'une fonction strictement concave

**Algorithm 3.1:** Méthode de la bisection

1. Nous fixons d'abord une borne inférieure  $x^i$  pour laquelle la dérivée en ce point est strictement positive.
2. Nous déterminons également une borne supérieure  $x^u$  pour laquelle la dérivée en ce point est strictement négative.
3. Si les deux bornes ne sont pas suffisamment près l'une de l'autre, i.e. la distance  $x^u - x^i$  est trop grande, nous prenons le point milieu entre les deux bornes comme point candidat  $x^c$ :

$$x^c = \frac{x^i + x^u}{2},$$

et nous passons à l'étape suivante. Sinon, c'est-à-dire si

$$x^u - x^i \leq 2\epsilon,$$

avec  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, nous nous arrêtons:  $x^c$  est une approximation suffisamment précise de la solution optimale.

4. Si la dérivée en  $x^c$  est nulle, arrêt:  $x^c$  est la solution optimale.
5. Si la dérivée en  $x^c$  est positive, nous posons  $x^i = x^c$ .
6. Si la dérivée en  $x^c$  est négative, nous posons  $x^u = x^c$ .
7. Retour à l'étape 3.

**3.2.4 Méthode du gradient**

Considérons une fonction concave  $f$  de *plusieurs variables*. La méthode de la bisection ne peut plus s'appliquer, aussi nous devons nous tourner vers une meilleure alternative. Le gradient de  $f$  au point  $x'$  est défini comme

$$\nabla_x f(x') = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x')}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x')}{\partial x_n} \end{pmatrix}'.$$

Il est possible de montrer que le gradient correspond à une direction d'augmentation de la valeur de  $f$ . Ainsi, dans la méthode du gradient, nous nous déplaçons dans la direction du gradient en tentant d'augmenter au maximum la valeur de l'objectif. A partir d'un point initial  $x'$ , nous effectuons un déplacement dans la direction du gradient vers un nouveau point  $x$ :

$$x = x' + s,$$

où  $s = t^* \nabla_x f(x')$ . Dans cette formule,  $t^*$  est la solution du problème de maximisation suivant:

$$\max_{t \geq 0} f(x' + t \nabla_x f(x')).$$

C'est un problème de maximisation d'une fonction concave d'une seule variable: nous pouvons par conséquent le résoudre, par exemple en employant la méthode de la bissection

Nous posons ensuite  $x' = x$ , et nous itérons ainsi jusqu'à ce que le gradient s'annule (ou presque). Nous avons par conséquent l'algorithme suivant.

**Algorithm 3.2:** Méthode du gradient

1. Déterminer une solution initiale  $x_0$ . Posons  $k = 0$ . Nous fixons également une constante  $\epsilon > 0$  suffisamment petite.

2. Résoudre le problème suivant:

$$\max_{t \geq 0} f(x_k + t \nabla_x f(x_k)). \quad (3.2.1)$$

3. Soit  $t^*$  la solution optimale de (3.2.1). Posons

$$x_{k+1} = x_k + t^* \nabla_x f(x_k),$$

et incrémentons  $k$ .

4. Si

$$\left| \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_j} \right| \leq \epsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

arrêt. Sinon, nous retournons en 2.

### 3.2.5 Optimisation sous contraintes

Dans le cas d'un modèle de programmation non-linéaire sans contrainte, nous avons vu la condition d'optimalité suivante: si  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est un maximum local, alors

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Cette condition n'est plus valable lorsqu'il y a des contraintes, car une solution optimale peut se trouver sur la frontière du domaine réalisable

**Exemple 18.** Nous souhaitons résoudre le programme

$$\begin{aligned} \max_x f(x) &= 6 - x - x^2 \\ \text{s.c. } x &\geq 0. \end{aligned}$$

Il est facile de se convaincre (voir Figure 3.7) que la solution optimale est  $x^* = 0$ , pourtant

$$\frac{df(0)}{dx} = -1 < 0.$$

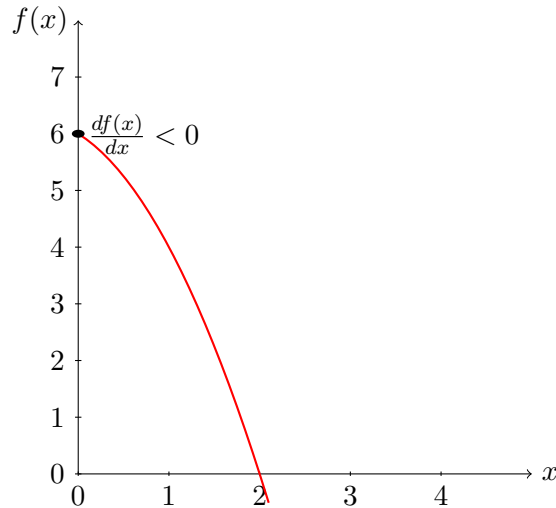


FIGURE 3.7 – Maximum d’une fonction concave sous contrainte de positivité

### 3.2.6 Conditions d’optimalité

Avec une contrainte de la forme  $x \geq 0$ , les conditions d’optimalité s’énoncent ainsi: si  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est un maximum local, alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0, & \text{si } x_j^* > 0, \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \leq 0, & \text{si } x_j^* = 0. \end{cases}$$

Il est plus délicat de dériver les conditions dans le cas général, où nous avons également des contraintes sont de la forme:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Elles s’expriment en fonction des *multiplicateurs de Lagrange*  $u_i$  associés à chaque contrainte.

#### Conditions KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

Si  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est un maximum local, alors il existe  $m$  nombres  $u_1, u_2, \dots, u_m$  tels que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} &\leq 0 \\ x_j^* \left( \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right) &= 0 \\ g_i(x^*) - b_i &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ u_i (g_i(x^*) - b_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ u_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

Les conditions KKT peuvent également s’exprimer en omettant les contraintes de non-négativité, lesquelles peuvent être réécrites sous la forme

$$-x_i \leq 0,$$

ou être tout simplement absentes. La forme qui suit est par conséquent plus générale, et plus communément admise en programmation non-linéaire (voir par exemple Nocedal et Wright [8]). Si  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est un maximum

local, alors il existe  $m$  nombres  $u_1, u_2, \dots, u_m$  tels que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} &= 0 \\ g_i(x^*) - b_i &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ u_i (g_i(x^*) - b_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ u_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

**Exemple 19** (Conditions KKT). *Considérons le problème*

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) &= \ln(x_1 + 1) + x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

*Nous pouvons donc considérer qu'il n'y a qu'une seule contrainte avec*

$$g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2,$$

*et  $b_1 = 3$ . Nous associons à cette contrainte un multiplicateur  $u_1 \geq 0$ . Outre les contraintes de non-négativité, nous avons alors les conditions suivantes:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 &\leq 0, \\ 1 - u_1 &\leq 0, \\ x_1^* \left( \frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 \right) &= 0, \\ x_2^* (1 - u_1) &= 0, \\ 2x_1^* + x_2^* - 3 &\leq 0, \\ u_1 (2x_1^* + x_2^* - 3) &= 0. \end{aligned}$$

*Nous obtenons  $u_1 \geq 1$ . Puisque  $x_1^* \geq 0$ , nous en déduisons*

$$\frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 < 0.$$

*Par conséquent,  $x_1^* = 0$ . Puisque  $u_1 \neq 0$ , nous avons*

$$2x_1^* + x_2^* - 3 = 0,$$

*et par conséquent  $x_2^* = 3$ . Dès lors,  $u_1 = 1$ . Les conditions KKT sont donc satisfaites en un seul point:  $(0, 3)$ . Il s'agit bien d'un maximum global, car la fonction objectif est concave et le domaine réalisable est convexe (modèle de programmation convexe).*

*En utilisant la version plus générale des conditions KKT, nous avons les conditions*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 + u_2 &\leq 0, \\ 1 - u_1 + u_3 &\leq 0, \\ 2x_1^* + x_2^* - 3 &\leq 0, \\ u_1 (2x_1^* + x_2^* - 3) &= 0, \\ -x_1 &\leq 0, \\ -x_2 &\leq 0, \\ u_2 x_1 &= 0, \\ u_3 x_2 &= 0. \end{aligned}$$

*Il est facile de vérifier que la solution de ce système est*

$$x_1 = 0, x_2 = 3, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 0.$$

### 3.3 Notes

Ce chapitre se base en grande partie sur les notes de cours de Bernard Gendron, 2007.





The purpose of mathematical programming is insight, not numbers.

Arthur M. Geoffrion

# 4

## Programmation mixte entière

### 4.1 Présentation générale

Certaines quantités ne peuvent s'écrire sous forme de nombres réels, issus d'un domaine continu. Au contraire, certaines décisions sont par nature discrètes, et doivent se représenter à l'aide de nombres entiers. Considérons par exemple une entreprise de transport, qui décide de renouvellement sa flotte de camions. Le nombre de camions à acheter est un nombre naturel.

La présence de telles variables entières modifie profondément la nature des programmes sous-jacents. Lorsqu'un problème est linéaire avec des variables entières, nous parlerons de *programmation mixte entière*. Si toutes les variables sont entières, nous utiliserons la terminologie de *programmation (pure) en nombres entiers*. Un exemple de programme en nombres entiers a déjà été rencontré dans la Section 1. Si les variables entières sont à valeurs 0 ou 1 (binaires), nous parlerons de programmation 0-1 (binaire).

Nous pourrions bien entendu considérer le cas non-linéaire, mais les complications sont telles qu'à ce jour, aucune méthode pleinement satisfaisante n'existe, même si d'intenses recherches sont actuellement conduites à ce niveau, notamment au sein de l'entreprise IBM.

**Exemple 20** (Problème du sac à dos). *Considérons un cambrioleur muni d'un sac (unique) pour transporter son butin. Son problème consiste à maximiser la valeur totale des objets qu'il emporte, sans toutefois dépasser une limite de poids  $b$  correspondant à ses capacités physiques. Supposons qu'il y a  $n$  type d'objets que le voleur pourrait emporter, et que ceux-ci sont en nombre tel que quelle que soit la nature de l'objet considéré, la seule limite au nombre d'unités que le cambrioleur peut prendre est que le poids total reste inférieur à  $b$ . Si l'on associe à l'objet  $j$  une valeur  $c_j$  et un poids  $w_j$ , la combinaison optimale d'objets à emporter sera obtenue en résolvant le programme mathématique*

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq b \\ & x_j \in \mathcal{N}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ici,  $x_j \in \mathcal{N}$  signifie que  $x_j$  est un naturel, autrement dit un entier non négatif. Intuitivement, nous pourrions penser que la solution consiste à choisir en premier lieu les objets dont le rapport qualité-poids est le plus avantageux, quitte à tronquer pour obtenir une solution entière (nous ne pouvons pas diviser un objet). Cette solution peut

malheureusement se révéler sous-optimale, voire mauvaise, comme on le constate sur l'exemple suivant.

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.c.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 14, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Si nous oublions la contrainte d'intégralité, la solution, de valeur 12.25, est  $x = (0, 0, 14/8)$ . En tronquant, on obtient la solution entière  $x = (0, 0, 1)$  de valeur 7. Il est facile de trouver de meilleures solutions, par exemple  $x = (1, 0, 1)$ .

La solution optimale du problème du cambrioleur peut s'obtenir en énumérant toutes les solutions admissibles et en conservant la meilleure (voir Table 4.1, où les solutions inefficaces laissant la possibilité d'ajouter un objet n'ont pas été considérées).

$x_1$	$x_2$	$x_3$	objectif
0	1	1	10
2	0	1	11
0	3	0	9
2	2	0	10
3	1	0	9
4	0	0	8

TABLE 4.1 – Problème du sac à dos: énumération des solutions

La solution optimale entière,  $x = (2, 0, 1)$ , diffère passablement de la solution optimale linéaire. Cependant, il est clair que cette technique d'énumération ne peut s'appliquer à des problèmes de grande taille.

**Exemple 21** (California Mfg). Une entreprise doit choisir de nouveaux emplacements pour construire des usines et des entrepôts. Elle a le choix entre deux emplacements: Los Angeles (LA) et San Fransisco (SF). Nous ne pouvons construire un entrepôt que dans une ville où nous disposons d'une usine, et nous ne pouvons pas construire plus d'un entrepôt. Nous associons à chaque construction (d'une usine ou d'un entrepôt dans chacun des lieux envisagés) sa valeur estimée et son coût de construction. L'objectif est de maximiser la valeur totale estimée, en ne dépassant pas une limite maximum sur les coûts. Les données du problème sont résumées dans la Table 4.2. Les variables sont

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la décision } j \text{ est approuvée;} \\ 0 & \text{si la décision } j \text{ n'est pas approuvée.} \end{cases}$$

L'objectif est de maximiser la valeur estimée totale:

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4.$$

Les contraintes fonctionnelles sont

	Valeur estimée (millions \$)	Coût de construction (millions \$)
Usine à LA	9	6
Usine à SF	5	3
Entrepôt à LA	6	5
Entrepôt à SF	4	2
Limite maximum	-	10

TABLE 4.2 – Données du problème California Mfg

1. la limite maximum sur les coûts de construction:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10;$$

2. nous ne pouvons construire plus d'un entrepôt:

$$x_3 + x_4 \leq 1;$$

3. l'entrepôt ne sera à LA que si l'usine est à LA:

$$x_3 \leq x_1;$$

4. l'entrepôt ne sera à SF que si l'usine est à SF:

$$x_4 \leq x_2;$$

5. contraintes 0-1 (intégralité):

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

ou encore

$$0 \leq x_j \leq 1 \text{ et } x_j \text{ entier, } j = 1, 2, 3, 4.$$

Par conséquent, nous avons le programme mathématique

$$\begin{aligned} \max z &= 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s.c. } 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10; \\ x_3 + x_4 &\leq 1; \\ -x_1 + x_3 &\leq 0; \\ -x_2 + x_4 &\leq 0; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\leq 1; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\text{ entiers.} \end{aligned}$$

Le modèle illustre deux cas classiques d'illustrations de variables binaires:

— alternatives mutuellement exclusives: nous ne pouvons construire plus d'un entrepôt, i.e.

$$x_3 + x_4 \leq 1;$$

— décisions contingentes: nous ne pouvons construire un entrepôt que là où nous avons construit une usine:

$$x_3 \leq x_1; x_4 \leq x_2;$$

**Exemple 22** (Localisation). Une entreprise envisage plusieurs sites de construction pour des usines qui serviront à approvisionner ses clients. À chaque site potentiel  $i$  correspond un coût de construction  $a_i$ , une capacité de production  $u_i$ , un coût de production unitaire  $b_i$  et des coûts de transport  $c_{ij}$  des usines vers les clients. Soit  $y_i$  une variable binaire prenant la valeur 1 si un entrepôt est construit sur le site  $i$ ,  $d_j$  la demande de l'usine  $j$  et  $x_{ij}$  la quantité produite à l'usine  $i$  et destinée au marché  $j$  (flot de  $i$  à  $j$ ). Un plan de construction optimal est obtenu en résolvant le programme

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_i a_i y_i + \sum_i b_i \sum_j x_{ij} + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} \quad & \sum_i x_{ij} = d_j, \\ & \sum_j x_{ij} \leq u_i y_i, \\ & x_{ij} \geq 0, \\ & y_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Cette formulation contient deux éléments intéressants: un coût fixe (construction) modélisé par une variable binaire  $y_i$  ainsi qu'une contrainte logique forçant les flots provenant d'un site à être nuls si aucune usine n'est construite en ce site. Notons aussi que certaines variables sont entières alors que d'autres (flots) sont réelles.

**Exemple 23** (Contraintes logiques). Des variables binaires peuvent servir à représenter des contraintes logiques. En voici quelques exemples, où  $p_i$  représente une proposition logique et  $x_i$  la variable logique (binaire) correspondante.

contrainte logique	forme algébrique
$p_1 \oplus p_2 = \text{vrai}$	$x_1 + x_2 = 1$
$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n = \text{vrai}$	$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 1$
$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n = \text{vrai}$	$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ (ou $= n$ )
$p_1 \Rightarrow p_2$	$x_2 \geq x_1$
$p_1 \Leftrightarrow p_2$	$x_2 = x_1$

**Exemple 24** (Fonctions linéaires par morceaux). Considérons une fonction objectif à maximiser, pour laquelle dans chaque intervalle  $[a_{i-1}, a_i]$  la fonction est linéaire, ce que nous pouvons exprimer par:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_{i-1}a_{i-1} + \lambda_i a_i \\ \lambda_{i-1} + \lambda_i &= 1, \\ \lambda_{i-1}, \lambda_i &\geq 0, \\ f(x) &= \lambda_{i-1}f(a_{i-1}) + \lambda_i f(a_i). \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser cette formule sur tout l'intervalle de définition de la fonction  $f$  en contraignant les variables  $\lambda_i$  à ne prendre que deux valeurs non nulles, et ce pour deux indices consécutifs. Ceci se fait en introduisant des variables binaires  $y_i$  associées aux intervalles de linéarité  $[a_{i-1}, a_i]$ :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \\ f(x) &= \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a_i), \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i &= 1, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 0, \dots, n \\ \lambda_0 &\leq y_1, \\ \lambda_1 &\leq y_1 + y_2, \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1} &\leq y_{n-1} + y_n, \\ \lambda_n &\leq y_n, \\ \sum_{i=1}^n y_i &= 1 \text{ (un seul intervalle "actif")} \\ y_i &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Si la fonction  $f$  est concave, les variables binaires  $y_i$  et les contraintes associées peuvent être éliminées de la formulation. Cette approche est particulièrement intéressante lorsqu'on optimise des fonctions de plusieurs variables de la forme  $\sum_i f_i(x_i)$ .

## 4.2 Contraintes mutuellement exclusives

### 4.2.1 Deux contraintes

Prenons l'exemple de deux contraintes. L'une ou l'autre des deux contraintes doit être satisfaite, mais pas les deux simultanément. Par exemple,

- soit  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ ;
- soit  $x_1 + 4x_2 \leq 16$ .

Soit  $M$  un très grand nombre; le système précédent est équivalent à

- soit

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + M; \end{aligned}$$

- soit

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + M, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16. \end{aligned}$$

En introduisant une variable binaire  $y$ , nous obtenons le système équivalent

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + M(1 - y), \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + My. \end{aligned}$$

La signification de cette variable est

- $y = 1$ , si la première contrainte est satisfaite;
- $y = 0$ , si la seconde contrainte est satisfaite.

Nous avons de la sorte construit deux alternatives mutuellement exclusives.

Nous aurions pu aussi introduire deux variables binaires:

- $y_1 = 1$ , si la première contrainte est satisfaite;
- $y_2 = 1$ , si la seconde contrainte est satisfaite.

Nous devons avoir

$$y_1 + y_2 = 1.$$

Afin de se ramener au modèle précédent, il suffit de poser

$$\begin{aligned} y_1 &= y; \\ y_2 &= 1 - y. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un cas particulier de la situation suivante:  $K$  parmi  $N$  contraintes doivent être satisfaites. Dans ce cas plus général, nous introduisons  $N$  variables binaires.

### 4.2.2 $K$ contraintes parmi $N$

Soit les  $N$  contraintes

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Nous introduisons  $N$  variables binaires, avec  $y_j = 1$  si la  $j^e$  contrainte est satisfaite:

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_j + M(1 - y_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Il reste à spécifier que seulement  $K$  de ces contraintes peuvent être satisfaites:

$$\sum_{j=1}^N y_j = K.$$

### 4.2.3 Fonction ayant $N$ valeurs possibles

Soit la contrainte

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1, \text{ ou } d_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } d_N.$$

Nous introduisons  $N$  variables binaires, avec  $y_j = 1$  si la fonction vaut  $d_j$ . La contrainte s'écrit alors

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^N d_j y_j,$$

avec

$$\sum_{j=1}^N y_j = 1.$$

**Exemple 25** (Wyndor Glass). *Supposons que le temps de production maximum à l'usine 3 n'est pas toujours 18h, mais pourrait également être 6h ou 12h. Cette contrainte s'écrit alors*

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \text{ ou } 12 \text{ ou } 18.$$

Nous introduisons alors trois variables binaires

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 6y_1 + 12y_2 + 18y_3, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{aligned}$$

### 4.2.4 Objectif avec coûts fixes

Supposons que le coût associé à un produit  $j$  est composé de deux parties:

1. un coût fixe initial  $k_j$  encouru dès qu'une unité de  $j$  est produite;
2. un coût  $c_j$  proportionnel au nombre d'unités de  $j$  produites.

Le coût total associé à la production de  $x_j$  unités est

$$f(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{si } x_j > 0, \\ 0 & \text{si } x_j = 0. \end{cases}$$

Supposons de plus que l'objectif consiste à minimiser la somme de  $n$  fonctions avec coûts fixes

$$\min z = \sum_{j=1}^n f_j(x_j).$$

Nous introduisons alors  $n$  variables binaires:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0, \\ 0 & \text{si } x_j = 0. \end{cases}$$

L'objectif s'écrit alors

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + k_j y_j.$$

Les valeurs de  $x_j$  et de  $y_j$  dépendent l'une de l'autre: il s'agit d'un exemple de *décisions contingentes*. Nous devons en particulier avoir une contrainte qui précise que  $x_j = 0$  si  $y_j = 0$ . Toutefois, les deux variables ne sont plus binaires, vu que  $x_j$  peut être quelconque. Soit  $M_j$  une borne supérieure sur la valeur de  $x_j$ . Nous pouvons écrire la relation entre les deux variables de cette manière:

$$x_j \leq M_j y_j.$$

Ainsi,

- si  $y_j = 0$ , alors  $x_j = 0$ ;
- si  $y_j = 1$ , alors  $x_j \leq M_j$ ;
- si  $x_j > 0$ , alors  $y_j = 1$ ;
- si  $x_j = 0$ , alors toute solution optimale satisfait  $y_j = 0$  lorsque  $k_j > 0$  (si  $k_j = 0$ , la variable  $y_j$  est inutile).

Nous obtenons par conséquent le programme

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + k_j y_j \\ \text{s.c. } x_j &\leq M_j, \\ y_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

#### 4.2.5 Variables entières en variables 0–1

Soit  $x$  une variable entière générale bornée:

$$0 \leq x \leq u,$$

et soit  $N$  l'entier tel que  $2^N \leq u \leq 2^{N+1}$ . La représentation binaire de  $x$  est

$$x = \sum_{j=0}^N 2^j y_j.$$

L'intérêt de cette transformation est que les méthodes de programmation 0–1 sont souvent plus efficaces que les méthodes de programmation en nombres entiers. Elle engendre néanmoins une multiplication du nombre de variables.

**Exemple 26.** *Nous considérons trois types de produits, et deux usines; nous exprimons le profit par unité de produit en milliers de dollars. Nous connaissons les ventes potentielles par produit (unités/semaine), et la capacité de production par usine (h/semaine). Nous avons toutefois comme contrainte que pas plus de deux produits ne peuvent être fabriqués, et une seule des deux usines doit être exploitée. Les données du problème sont résumées dans la Table 4.3. Les variables sont  $x_j$ , le nombre d'unités fabriquées du produit  $j$ . Pour représenter la contrainte "pas*

	Produit 1 temps de production (h/unité)	Produit 2 temps de production (h/unité)	Produit 3 temps de production (h/unité)	Capacité de production (h/semaine)
Usine 1	3	4	2	30
Usine 2	4	6	2	40
Profit/unité (1000\$)	5	7	3	–
Ventes potentielles (par semaine)	7	5	9	–

TABLE 4.3 – Exemple de production avec variables entières.

*plus de deux produits", nous devons introduire des variables 0–1:*

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0; \\ 0 & \text{si } x_j = 0. \end{cases}$$

*Afin de représenter la contrainte "une seule des deux usines", nous devons ajouter une variables 0–1:*

$$y_4 = \begin{cases} 1 & \text{si l'usine 1 est choisie;} \\ 0 & \text{si sinon.} \end{cases}$$

L'objectif est

$$\max z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3.$$

Les ventes potentielles sont

$$x_1 \leq 7, \quad x_2 \leq 5, \quad x_3 \leq 9.$$

L'exigence interdisant d'avoir plus de deux produits se traduit mathématiquement par

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2.$$

La relation entre les variables continues et les variables 0-1 s'exprime par

$$x_1 \leq 7y_1, \quad x_2 \leq 5y_2, \quad x_3 \leq 9y_3.$$

La contrainte portant sur l'utilisation d'une seule usine est

$$- \text{ soit } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30;$$

$$- \text{ soit } 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40.$$

En utilisant la variable 0-1 (et  $M$  très grand), elle se traduit par

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 + M(1 - y_4),$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 + My_4.$$

En résumé, nous avons le modèle

$$\max z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.c. } x_1 \leq 7y_1, \quad x_2 \leq 5y_2, \quad x_3 \leq 9y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 + M(1 - y_4),$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 + My_4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$y_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, 3, 4.$$

**Exemple 27.** Nous considérons à nouveau trois types de produits, pour lesquels nous pouvons placer cinq annonces publicitaires, avec un maximum de trois annonces par produit. L'estimation des revenus publicitaires est donnée dans la Table 4.4, où les profits sont exprimés en millions de dollars. Les variables du problème sont le nombre

Nombre d'annonces	Produit 1	Produit 2	Produit 3
0	0	0	0
1	1	0	-1
2	3	2	2
3	3	3	4

TABLE 4.4 – Revenus publicitaires.

d'annonces pour le produit  $i$ , dénoté par  $x_i$ , mais l'hypothèse de proportionnalité est alors violée: nous ne pouvons représenter l'objectif sous forme linéaire uniquement avec ces variables.

Prenons tout d'abord comme variables

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objectif est

$$\max z = y_{11} + 3y_{12} + 3y_{13} + 2y_{22} + 3y_{23} - y_{31} + 2y_{32} + 4y_{33}.$$



Nous utiliserons les 5 annonces disponibles:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 j y_{ij} = 5.$$

Enfin, la définition des variables 0-1 donne

$$\sum_{j=1}^3 y_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous pourrions aussi prendre comme variables

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, nous avons remplacé l'égalité dans la première condition par une inégalité. Cette définition implique

$$x_i = 0 \Rightarrow y_{i1} = 0, y_{i2} = 0, y_{i3} = 0;$$

$$x_i = 1 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 0, y_{i3} = 0;$$

$$x_i = 2 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 1, y_{i3} = 0;$$

$$x_i = 3 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 1, y_{i3} = 1.$$

Ce qui peut encore s'énoncer comme

$$y_{i(j+1)} \leq y_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

Supposons que  $x_1 = 3$  (il y a trois annonces pour le produit 1). Le profit associé à cette valeur doit être 3. Mais  $x_1 = 3$  veut aussi dire que chaque variable binaire associée au produit 1 vaut 1; comment dès lors comptabiliser correctement la contribution de ces trois variables au profit? La solution consiste à prendre comme profit associé à la variable  $y_{ij}$  la différence  $c_{i,j+1} - c_{ij}$ , où  $c_{ij}$  est le revenu net si nous plaçons  $j$  annonce pour le produit  $i$ . Dans notre exemple, le profit associé à

$$- y_{11} \text{ est } 1-0 = 1;$$

$$- y_{12} \text{ est } 3-1 = 2;$$

$$- y_{13} \text{ est } 3-3 = 0;$$

Nous obtenons ainsi le programme mathématique suivant:

$$\max z = y_{11} + 2y_{12} + 2y_{22} + y_{23} - y_{31} + 3y_{32} + 2y_{33}$$

$$\text{s.c. } y_{i(j+1)} \leq y_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} = 5,$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

#### 4.2.6 Problème de recouvrement

**Exemple 28** (Affectation des équipages). Un problème important des compagnies aériennes consiste à constituer de façon efficace des équipages pour ses vols. Pour un équipage donné, une rotation consiste en une succession de services de vol débutant et se terminant en une même ville. Comme il y a un coût associé à chaque séquence de vols, la compagnie cherche à minimiser les coûts d'affectation des équipages aux séquences tout en assurant le service sur chacun des vols.

Considérons par exemple un problème avec 11 vols et 12 séquences de vols, dont les données sont décrites dans la Table 4.5. Les variables sont

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la séquence de vols } j \text{ est affectée;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vol   Séquence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1			1			1			1		
2		1			1			1			1	
3			1			1			1			1
4				1			1		1	1		1
5	1					1				1	1	
6				1	1				1			
7							1	1		1	1	1
8		1		1	1				1			
9					1			1			1	
10			1				1	1				1
11						1			1	1	1	1
Coût	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

TABLE 4.5 – Affectation d'équipages.

L'objectif est

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}.$$

Nous devons affecter trois équipages

$$\sum_{j=1}^{12} x_j = 3.$$

Le service doit être assuré sur chacun des vols:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} &\geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} &\geq 1 \\ x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} &\geq 1 \\ x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{12} &\geq 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

En pratique, il faut tenir compte des contraintes imposées par les conventions collectives, ce qui complique singulièrement le problème.

Un problème de recouvrement d'ensemble met en oeuvre

- $I$ : un ensemble d'objets (les vols dans l'exemple précédent);
- $\mathcal{J}$ : une collection de sous-ensembles de  $I$  (e.g. les séquences de vols);
- $J_i, i \in I$ : les sous-ensembles dans  $\mathcal{J}$  qui contiennent  $i$ .

Nous avons les variables binaires  $x_j$ , prenant la valeur 1 si le sous-ensemble  $j$  est choisi, et 0 sinon. En considérant un objectif linéaire, avec  $c_j$  le coût associé au sous-ensemble  $j$ . Nous obtenons le programme

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j \in J_i} x_j \geq 1, \quad i \in I; \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

## 4.3 Stratégies de résolutions

### 4.3.1 Relaxation linéaire

Il est tentant “d’oublier” les contraintes d’intégralité, et de résoudre le problème en nombres continus ainsi produit. Nous parlerons alors de *relaxation*. Ainsi, nous pourrions construire la relaxation en programme linéaire d’un programme mixte entier. Une fois le programme relâché résolu, nous pourrions arrondir aux valeurs entières les plus proches. Dans certains cas, cela peut fonctionner, mais l’exemple du sac à dos montre que ce n’est pas toujours vérifié. Cette méthode par arrondissement est même parfois désastreuse.

**Exemple 29.** *Considérons le programme*

$$\begin{aligned} \max z &= x_2 \\ \text{s.c.} \quad -x_1 + x_2 &\leq \frac{1}{2}, \\ x_1 + x_2 &\leq \frac{7}{2}, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ et entiers.} \end{aligned}$$

*La relaxation en programme linéaire donne*

$$\begin{aligned} \max z &= x_2 \\ \text{s.c.} \quad -x_1 + x_2 &\leq \frac{1}{2}, \\ x_1 + x_2 &\leq \frac{7}{2}, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

*Ce nouveau programme a pour solution  $(\frac{3}{2}, 2)$ . Que nous arrondissions cette solution à  $(1, 2)$  ou  $(2, 2)$ , nous n’obtenons pas de solution réalisable, comme illustré sur la Figure 4.1*

**Exemple 30.** *Considérons le programme*

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} \quad x_1 + 10x_2 &\leq 20, \\ x_2 &\leq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ et entiers.} \end{aligned}$$

*La version relâchée de programme est*

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} \quad x_1 + 10x_2 &\leq 20, \\ x_2 &\leq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

*qui a pour solution optimale  $(2, 1.8)$ . En arrondissant à  $(2, 1)$  afin de garantir l’admissibilité, nous obtenir la valeur 7 pour la fonction objectif, loin de la valeur optimale du programme mixte entier, avec pour valeur optimale 11, en  $(0, 2)$  (voir Figure 4.2).*

### 4.3.2 Approche par énumération

Un modèle en nombres entiers borné (par exemple, un modèle avec uniquement des variables 0–1) possède un nombre fini de solutions. Nous pourrions envisager de toutes les énumérer, mais le nombre de solutions explose rapidement. Pour  $n = 20$  variables 0–1, il y a plus d’un million de solutions possibles. Pour  $n = 30$ , c’est plus d’un

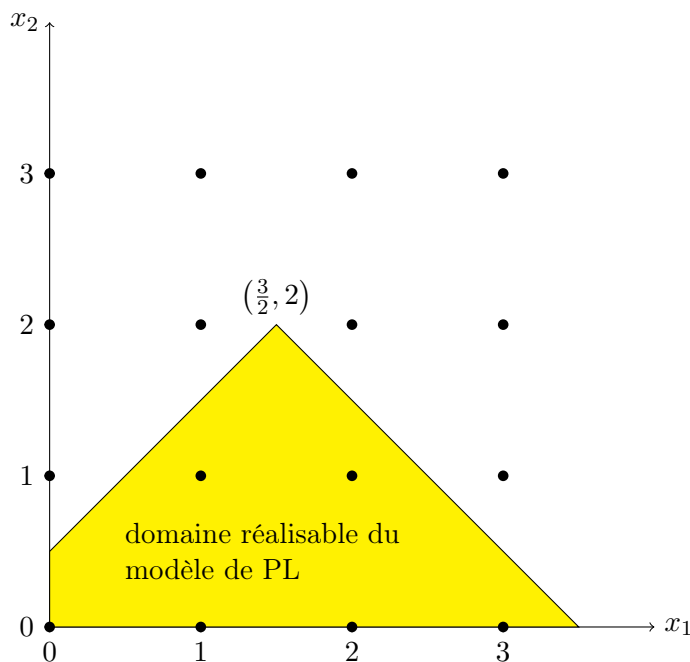


FIGURE 4.1 – Exemple de relaxation linéaire: problème d’admissibilité des solutions

milliard. Comme il apparaît qu’il est vite déraisonnable de procéder à une énumération complète des solutions, nous allons essayer de mettre à profit la relaxation en programme linéaire pour éliminer certaines de ces solutions. Cette technique d’énumération partielle est connue sous le vocable de *branch-and-bound* (B&B). Il s’agit d’une approche *diviser-pour-régner*:

- décomposition du problème en sous-problèmes plus simples;
- combinaison de la résolution de ces sous-problèmes pour obtenir la solution du problème original.

Dans l’algorithme de branch-and-bound, chaque sous-problème correspond à un sommet dans l’arbre des solutions. Nous résolvons la relaxation linéaire de chaque sous-problème. L’information tirée de la relaxation linéaire nous permettra (peut-être) d’éliminer toutes les solutions pouvant être obtenues à partir de ce sommet.

### Algorithme de branch & bound: cas 0–1

Un algorithme simple pour énumérer toutes les solutions d’un modèle 0–1 consiste à:

- choisir un sommet dans l’arbre des solutions;
- choisir une variable  $x$  non encore fixée relativement à ce sommet;
- générer les deux variables  $x = 0$  et  $x = 1$  (la variable  $x$  est dite *fixée*): chaque alternative correspond à un sommet de l’arbre des solutions;
- recommencer à partir d’un sommet pour lequel certaines variables ne sont pas encore fixées.

A la racine de l’arbre, aucune variable n’est encore fixée, tandis qu’aux feuilles de l’arbre, toutes les variables ont été fixées. Le nombre de feuilles est  $2^n$  (pour  $n$  variables 0–1).

Le calcul de borne (ou évaluation) consiste à résoudre la relaxation linéaire en chaque sommet. L’élagage (ou élimination) consiste à utiliser l’information tirée de la résolution de la relaxation linéaire pour éliminer toutes les solutions émanant du sommet courant. Dès lors, le branch-and-bound est un algorithme de séparation et d’évaluation successives.

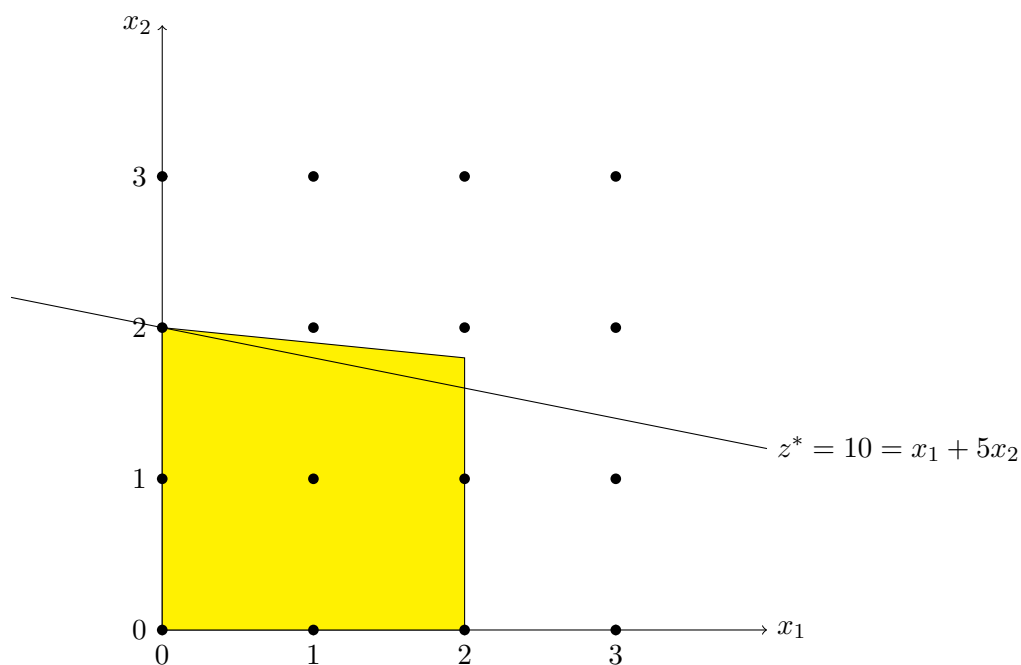


FIGURE 4.2 – Exemple de relaxation linéaire: solution médiocre

**Exemple 31** (California Mfg). *Rappelons le problème*

$$\begin{aligned}
 \max z &= 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
 \text{s.c. } &6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10; \\
 &x_3 + x_4 \leq 1; \\
 &-x_1 + x_3 \leq 0; \\
 &-x_2 + x_4 \leq 0; \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1; \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0; \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ entiers.}
 \end{aligned}$$

La relaxation linéaire permet aux variables de prendre les valeurs fractionnaires entre 0 et 1, ce qui conduit à la solution

$$\left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right),$$

avec comme valeur  $z = 16.5$ . Branchons sur la variable  $x_1$ .

Dénotons sous-problème 1 celui obtenu avec  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \max z &= 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
 \text{s.c. } &3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10; \\
 &x_3 + x_4 \leq 1; \\
 &x_3 \leq 0; \\
 &-x_2 + x_4 \leq 0; \\
 &x_2, x_3, x_4 \text{ binaires.}
 \end{aligned}$$

La solution de la relaxation linéaire est  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1)$ , avec  $z = 9$ .

Le sous-problème 2 est celui obtenu avec  $x_1 = 1$ :

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9 \\ \text{s. c. } 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 4; \\ x_3 + x_4 &\leq 1; \\ x_3 &\leq 1; \\ -x_2 + x_4 &\leq 0; \\ x_2, x_3, x_4 &\text{ binaires.} \end{aligned}$$

La solution de la relaxation linéaire est alors

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5}\right),$$

avec  $z = 16 + \frac{1}{5}$ .

Nous obtenons dès lors les bornes suivantes:

- sous-problème 1:  $Z_1 \leq 9$ ;
- sous-problème 2:  $Z_2 \leq 16 + \frac{1}{5}$ .

Notons que toutes les variables sont binaires et tous les paramètres dans l'objectif sont des valeurs entières. Dès lors, la borne supérieure pour le sous-problème 2 est 16. Pour le sous-problème 1, la solution obtenue est entière: c'est la meilleure solution courante. Nous savons que la valeur optimale cherchée,  $Z$ , sera au moins

$$Z^* = 9 : Z \geq Z^*.$$

Quels sous-problèmes pouvons-nous à présent considérer afin de nous approcher de la solution optimale? Tous les sous-problèmes actuellement traités doivent-ils donner naissance à d'autres problèmes. Si un sous-problème ne donne lieu à aucun autre problème, nous parlerons d'élagage, en référence avec l'idée de couper la branche correspondante dans l'arbre d'exploration.

Considérons tout d'abord le sous-problème 1: la solution optimale de la relaxation PL est entière. Il ne sert donc à rien de brancher sur les autres variables, puisque toutes les autres solutions entières (avec  $x_1 = 0$ ) sont nécessairement de valeur inférieures ou égales à 9. Nous pouvons donc élaguer ce sommet.

Pour le sous-problème 2, la solution optimale de la relaxation PL n'est pas entière:

$$Z^* = 9 \leq Z \leq 16.$$

La branche ( $x_1 = 1$ ) peut encore contenir une solution optimale. Mais si nous avons eu  $Z_2 \leq Z^*$ , nous aurions pu conclure que la branche ne pouvait améliorer la meilleure solution courante.

Un sous-problème est élagué si une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- test 1: sa borne supérieure (valeur optimale de la relaxation PL) est inférieure ou égale à  $Z^*$  (valeur de la meilleure solution courante) ;
- test 2: sa relaxation PL n'a pas de solution réalisable ;
- test 3: la solution optimale de sa relaxation PL est entière.

Lorsque le test 3 est vérifié, nous testons si la valeur optimale de la relaxation PL du sous-problème,  $Z_i$ , est supérieure à  $Z^*$ . Si  $Z_i > Z^*$ , alors  $Z^* := Z_i$ , et nous conservons la solution, qui devient la meilleure solution courante. En résumé, nous obtenons l'algorithme ci-dessous.

**Algorithm 4.1:** Branch-and-Bound: cas binaire

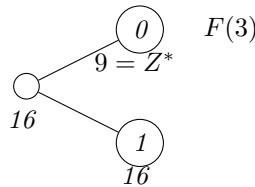
1. Initialisation:
  - (a) poser  $Z^* = -\infty$ ;
  - (b) appliquer le calcul de borne et les critères d'élagage à la racine (aucune variable fixée).
2. Critère d'arrêt : s'il n'y a plus de sous-problèmes non élagués, arrêter.
3. Branchement:

- (a) parmi les sous-problèmes non encore élagués, choisir celui qui a été créé le plus récemment (s'il y a égalité, choisir celui de plus grande borne supérieure);
  - (b) appliquer le Test 1: si le sous-problème est élagué, retourner en 2.
  - (c) brancher sur la prochaine variable non fixée.
4. Calcul de borne:
- (a) résoudre la relaxation PL de chaque sous-problème;
  - (b) arrondir la valeur optimale si tous les paramètres de l'objectif sont entiers.
5. Elagage: élaguer un sous-problème si
- (a) la borne supérieure est inférieure ou égale à  $Z^*$ ;
  - (b) la relaxation PL n'a pas de solution réalisable;
  - (c) la solution optimale de la relaxation PL est entière: si la borne supérieure est strictement supérieure à  $Z^*$ ,  $Z^*$  est mise à jour et la solution de la relaxation PL devient la meilleure solution courante.
6. Retourner en 2.

A partir de quel noeud devrions-nous brancher? Il y a plusieurs choix possibles; dans cette version, on propose comme règle de sélection de choisir le sous-problème le plus récemment créé. L'avantage est que cette approche facilite la réoptimisation lors du calcul de borne, car il n'y a que peu de changements apportés par rapport au dernier sous-problème traité. Le désavantage est que cela peut créer un grand nombre de sous-problèmes. Une autre option est la règle de la meilleure borne: choisir le sous-problème ayant la plus grande borne supérieure.

Dans cette version, la règle de branchement consiste à choisir la prochaine variable non fixée. Il est souvent plus intéressant de choisir une variable à valeur fractionnaire. En branchant sur une telle variable, il est certain que les deux sous-problèmes créés mènent à des solutions différentes de la solution courante. De nombreux critères existent pour choisir une telle variable de façon à orienter la recherche vers un élagage rapide.

**Exemple 32** (suite). *Jusqu'à maintenant, voici l'arbre obtenu, en branchant sur la variable  $x_1$ .*



$F(3)$  indique que le sous-problème a été élagué (fathomed) en raison du Test 3.

Sélection: nous choisissons le sous-problème 2, le seul qui n'a pas encore été élagué. Nous branchons sur la prochaine variable, soit  $x_2$ . Deux nouveaux sous-problèmes sont créés:

- sous-problème 3:  $x_1 = 1, x_2 = 0$ ;
- sous-problème 4:  $x_1 = 1, x_2 = 1$ .

Considérons tout d'abord le sous-problème 3 ( $x_1 = 1, x_2 = 0$ ). Nous obtenons le problème

$$\begin{aligned} \max z_3 &= 6x_3 + 4x_4 + 9 \\ \text{s.c. } 5x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_4 &\leq 0 \\ x_3, x_4 &\text{ binaire.} \end{aligned}$$

La solution de la relaxation PL est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, 0, \frac{4}{5}, 0\right).$$

et

$$Z = 13 + \frac{4}{5} : Z_3 \leq 13.$$

Le sous-problème 4 ( $x_1 = 1, x_2 = 1$ ) devient

$$\begin{aligned} \max z_4 &= 6x_3 + 4x_4 + 14 \\ \text{s.c. } 5x_3 + 2x_4 &\leq 1 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_4 &\leq 1 \\ x_3, x_4 &\text{ binaires.} \end{aligned}$$

La solution de la relaxation PL est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, 1, 0, \frac{1}{2}\right).$$

et

$$Z = 16 : Z_4 \leq 16.$$

Aucun des tests d'élagage ne s'applique sur ces sous-problèmes. Nous devons dès lors choisir un des deux sous-problèmes pour effectuer un branchement, puisque ce sont ceux créés le plus récemment. Nous choisissons celui de plus grande borne supérieure, soit le sous-problème 4. Deux possibilités existent: brancher sur la variable fractionnaire,  $x_4$ , ou choisir la prochaine variable non fixée,  $x_3$ . Nous explorons la deuxième approche, i.e. nous branchons sur  $x_3$ , et nous générons deux nouveaux sous-problèmes.

Le sous-problème 5, défini avec  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ , s'écrit

$$\begin{aligned} \max z_5 &= 4x_4 + 14 \\ \text{s.c. } 2x_4 &\leq 1 \\ x_4 &\leq 1 \\ x_4 &\leq 1 \\ x_4 &\text{ binaire.} \end{aligned}$$

La solution de la relaxation PL est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

et

$$Z = 16 : Z_5 \leq 16.$$

Le sous-problème 6, défini avec  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ , s'écrit

$$\begin{aligned} \max z_6 &= 4x_4 + 20 \\ \text{s.c. } 2x_4 &\leq -4 \\ x_4 &\leq 0 \\ x_4 &\leq 1 \\ x_4 &\text{ binaire.} \end{aligned}$$

La relaxation PL n'a pas de solution réalisable: ce sous-problème est élagué.

Le sous-problème 5 ne peut pas être élagué. Il est créé le plus récemment parmi les sous-problèmes non élagués (3 et 5), aussi choisissons-nous le pour effectuer un branchement. Nous branchons sur  $x_4$  et générons les sous-problèmes suivants:

- sous-problème 7:  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ ;
- sous-problème 8:  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$ .



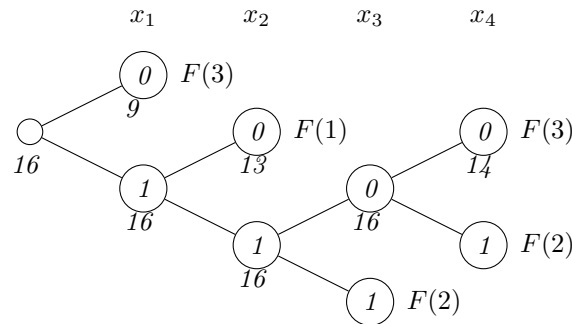
Toutes les variables sont fixées, aussi pouvons-nous directement résoudre ces sous-problèmes. Le sous-problème 7 a pour solution  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ , pour  $Z_7 = 14$ . La solution est entière, aussi nous élaguons le sous-problème en vertu du Test 3. Puisque  $Z_7 > Z^*$ ,  $Z^* = 14$  et la solution du sous-problème devient la meilleure solution courante. Le sous-problème 8 a pour solution  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1)$ . Cette solution n'est pas réalisable, car la première contrainte ( $2x_4 \leq 1$ ) est violée. Le sous-problème est par conséquent élagué par le Test 2.

Le sous-problème 3 est le seul non encore élagué. Appliquons le Test 1:  $Z_3 = 13 \leq 14 = Z^*$ . Le sous-problème est donc élagué. Comme il n'y a plus de sous-problèmes non élagués, nous pouvons nous arrêter. La solution optimale est:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0),$$

et la valeur optimale est  $Z^* = 14$ .

L'arbre obtenu suite à l'exécution de l'algorithme se présente comme suit:



$F(j)$ : le sous-problème est élagué par le Test  $j$

### Algorithme de branch & bound: cas général

Considérons à présent le cas général d'un modèle de programmation (mixte) en nombres entiers: variables entières générales et variables continues. Comme précédemment, nous ignorons dans un premier temps les contraintes d'intégralité (les valeurs des variables entières sont traitées comme variables continues), et résolvons le programme linéaire résultant. Si la solution optimale de ce programme satisfait aux contraintes d'intégralité, alors cette solution est aussi solution optimale du programme avec variables entières. Sinon, il doit exister au moins une variable  $x_j$  dont la valeur  $\alpha$  est fractionnaire. La procédure de branchement se généralise alors comme suit: nous séparons alors le problème relâché en deux sous-problèmes; un sous-problème contiendra la contrainte  $x_j \leq \lfloor \alpha \rfloor$  et le second la contrainte  $x_j \geq \lceil \alpha \rceil = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ . Nous répétons le processus pour chacun des sous-problèmes. Cette procédure est habituellement représentée sous forme d'un arbre binaire où, à chaque niveau, une partition du sommet père s'effectue suivant la règle décrite précédemment. Il s'agit alors de parcourir cet arbre d'énumération afin d'y trouver la solution optimale. L'exploration d'un chemin de l'arbre peut prendre fin pour trois raisons:

- la solution devient entière;
- le domaine admissible d'un sous-problème devient vide;
- la valeur de l'objectif correspondant à la solution optimale du problème relâché est inférieure (moins bonne) à celle d'une solution admissible connue, possiblement obtenue à un autre sommet de l'arbre.

Dans chacun de ces trois cas on dit que le sommet est sondé, et il est inutile de pousser plus loin dans cette direction. L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets sont sondés. La meilleure solution obtenue au cours du déroulement de l'algorithme est alors l'optimum global de notre problème.

#### Algorithm 4.2: Algorithme de B&B: cas général

1. Initialisation:
  - (a) Poser  $Z^* = -\infty$ .
  - (b) Appliquer le calcul de borne et les critères d'élagage à la racine (aucune variable fixée).
  - (c) Critère d'arrêt : s'il n'y a plus de sous-problèmes non élagués, arrêter.
2. Branchement:

- (a) Parmi les sous-problèmes non encore élagués, choisir celui qui a été créé le plus récemment (s'il y a égalité, choisir celui de plus grande borne supérieure).
  - (b) Appliquer le Test 1: si le sous-problème est élagué, retourner en 2.
  - (c) Brancher sur la prochaine variable entière à valeur non entière dans la relaxation PL.
3. Calcul de borne: résoudre la relaxation PL de chaque sous-problème.
  4. Elagage: élaguer un sous-problème si
    - (a) La borne supérieure est inférieure ou égale à  $Z^*$ .
    - (b) La relaxation PL n'a pas de solution réalisable.
    - (c) Dans la solution optimale de la relaxation PL, toutes les variables entières sont à valeurs entières: si la borne supérieure est strictement supérieure à  $Z^*$ ,  $Z^*$  est mise à jour et la solution de la relaxation PL devient la meilleure solution courante.
  5. Retourner en 2.

### 4.3.3 Les hyperplans coupants (méthode de coupe)

Vu que l'énumération des variables entières peut être coûteuse, l'idée est d'ajouter des contraintes redondantes pour le modèle en nombres entiers, mais non pour la relaxation PL.

**Exemple 33.** *Considérons le programme mathématique*

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 4x_1 + \frac{5}{2}x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

*Le dictionnaire optimal correspondant à la relaxation linéaire de ce programme contient les deux contraintes*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{15}{4} + \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4, \\ x_2 &= \frac{9}{4} - \frac{9}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4, \end{aligned}$$

*où  $x_3$  et  $x_4$  sont des variables d'écart. Puisque la variable de base  $x_1$  n'est pas entière, cette solution de base n'est pas admissible. nous pouvons réécrire la première contrainte sous la forme*

$$x_1 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4}.$$

*En utilisant l'identité*

$$a = [a] + (a - [a]),$$

*où  $(a - [a])$  représente la partie fractionnaire de  $a$  ( $0 \leq a - [a] < 1$ ), nous obtenons*

$$x_1 + \left( \left[ -\frac{5}{4} \right] + \frac{3}{4} \right) x_3 + \left( \left[ \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{4} \right) x_4 = \left( \left[ \frac{15}{4} \right] + \frac{3}{4} \right),$$

*c'est-à-dire, en mettant tous les coefficients entiers à gauche et les coefficients fractionnaires à droite:*

$$x_1 - 2x_3 - 3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4.$$

Puisque les variables  $x_3$  et  $x_4$  sont non négatives, la partie fractionnaire (constante du membre de droite) est inférieure à 1, le membre de droite est strictement inférieur à 1. Puisque le membre de gauche est entier, le membre de droite doit aussi être entier. Or un entier inférieur à 1 doit être inférieur ou égal à zéro. Nous en déduisons une contrainte additionnelle qui doit être satisfaite par toute solution admissible du problème originel, et que ne satisfait pas la solution de base courante:

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq 0.$$

En utilisant les identités  $x_3 = 6 - x_1 - x_2$  et  $x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2$ , nous obtenons la coupe sous sa forme géométrique:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15.$$

Cette contrainte linéaire rend inadmissible la solution courante admissible, sans éliminer aucune autre solution entière. Si la solution du nouveau problème est entière, il s'agit de la solution optimale de notre problème. Sinon, nous construisons une nouvelle coupe et recommençons.

**Exemple 34.** Reprenons le problème, illustré sur la Figure 4.3,

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + 3x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\text{ binaire.} \end{aligned}$$

Les solutions réalisables sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .

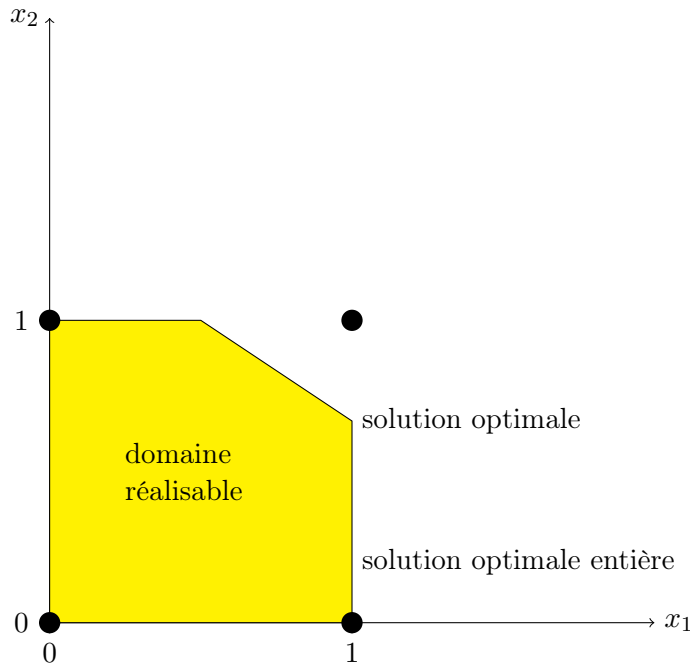


FIGURE 4.3 – Méthode de coupes

Une contrainte redondante est:

$$x_1 + x_2 \leq 1.$$

Suite à l'ajout de la contrainte redondante, comme représenté sur la Figure 4.4, le problème est résolu à la racine.

Il y a plusieurs algorithmes permettant de générer de telles inégalités redondantes, appelées coupes. Mais il est rare que leur ajout permette de résoudre le problème à la racine. L'ajout de coupes permet toutefois de réduire le nombre de sous-problèmes traités par l'algorithme de Branch-and-Bound. Nous pouvons même ajouter des coupes pour chaque sous-problème (pas seulement à la racine): nous obtenons alors un algorithme de branch-and-cut.

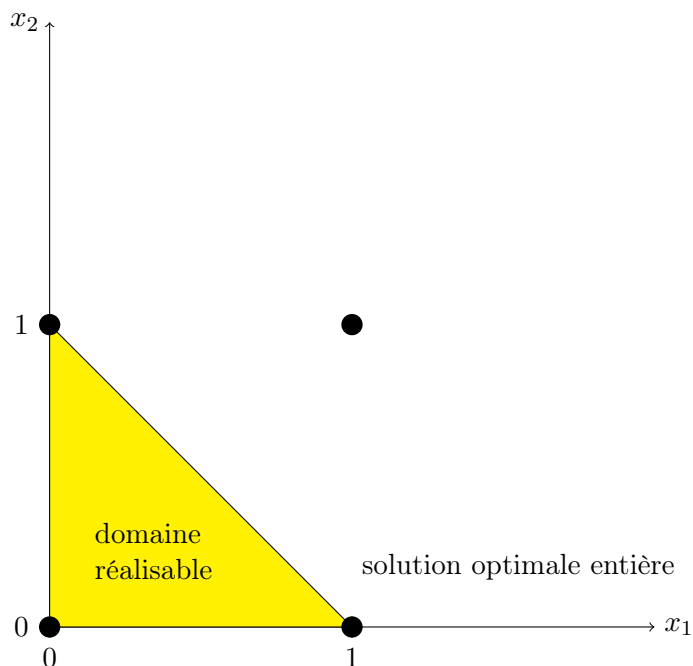


FIGURE 4.4 – Méthode de coupes: ajout d'une contrainte

## 4.4 Modélisation avec GAMS

**Exemple 35** (Echangeurs de chaleur). *Considérons un problème simplifié d'affectation de flux de processus à des échangeurs de chaleur; les échangeurs de chaleur ont pour but de transférer la chaleur d'un flux chaud à un flux froid, afin de limiter la consommation d'énergie nécessaire pour chauffer ou refroidir des flux liquides (par exemple de l'eau) intervenant dans des processus de production industrielle. Le problème d'optimisation correspondant est:*

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre qu'un problème classique d'affectation.  $i$  représente ici l'indice des  $n$  flux, et  $j$ , l'indice des  $n$  échangeurs. La variable binaire  $x_{ij}$  vaut 1 si le flux  $i$  est affecté à l'échangeur  $j$ , et 0 sinon. Les contraintes indiquent que chaque échangeur doit être affecté à un flux, et réciproquement. Les coûts  $c_{ij}$  d'affectation des flux aux échangeurs sont résumés dans la Table 4.5. Le problème peut se formuler en GAMS comme

HEAT.GMS

```
$TITLE Test Problem
$OFFSYMXREF
$OFFSYMLIST
```

Echangeur \ Flux	1	2	3	4
A	94	1	54	68
B	74	10	88	82
C	73	88	8	76
D	11	74	81	21

FIGURE 4.5 – coûts d'affectation des échangeurs de chaleur

SETS

```
I streams / A, B, C, D /
J exchangers / 1*4 / ;
```

TABLE C(I,J) Cost of assigning stream i to exchanger j

```
      1  2  3  4
A  94  1  54  68
B  74  10  88  82
C  73  88  8  76
D  11  74  81  21 ;
```

VARIABLES X(I,J), Z;

BINARY VARIABLES X(I,J);

EQUATIONS ASSI(J), ASSJ(I), OBJ;

ASSI(J).. SUM( I, X(I,J) ) =E= 1;

ASSJ(I).. SUM( J, X(I,J) ) =E= 1;

OBJ.. Z =E= SUM ( (I,J), C(I,J)\*X(I,J) ) ;

MODEL HEAT / ALL /;

OPTION LIMROW = 0;

OPTION LIMCOL = 0;

OPTION SOLPRINT = OFF;

SOLVE HEAT USING MIP MINIMIZING Z;

DISPLAY X.L, Z.L ;

La commande `OPTION SOLPRINT=OFF` supprime l'impression de la solution ; la sortie sera contrôlée par la commande `DISPLAY` placé juste à la suite.

**Exemple 36** (Problème de production). Nous souhaitons maximiser le profit que nous pourrions obtenir en considérant 3 produits. Il n'y a pas coût de productions unitaires, mais des coûts fixes sont présents pour le premier et le deuxième produits. Chaque produit est stocké, et nous ne pouvons pas dépasser le volume disponible. Le code GAMS du problème est

VARIABLES

```
z profit;
```

```

POSITIVE VARIABLES
  x1          produit1
  x2          produit2
  x3          produit3;

BINARY VARIABLES
  y1
  y2          ;

EQUATIONS
  Objective          Maximize profit
  Ressource
  Upper1            limit on product 1
  Upper2            limit on product 2
  Upper3            limit on product 3;

Objective..
  z =E= 2*x1 + 3*x2 + 0.8*x3 - 3*y1 - 2*y2;

Ressource..
  0.2*x1 + 0.4*x2 + 0.2*x3 =L= 1;

Upper1..
  x1 =L= 3*y1;

Upper2..
  x2 =L= 2*y2;

Upper3..
  x3 =L= 5;

MODEL example /ALL/;

OPTION optcr = 0.05;

SOLVE example USING mip maximizing z;

```

*Notons la ligne*

```
OPTION optcr = 0.05;
```

*qui nous donne le critère d'optimalité sur la valeur optimale. Dans le cas présent, nous exigeons que l'écart relatif entre la borne supérieur et la borne inférieure soit inférieur à 5%.*

## 4.5 Exercices

**Exercice 1** (Hillier et Lieberman [2], Exercice 12.7-9). *Utiliser l'algorithme de Branch & Bound pour résoudre le problème*

$$\begin{aligned}\max z &= 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5, \\ \text{s.c. } 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 &\leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &\leq 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

## 4.6 Notes

Le contenu de ce chapitre est repris des notes de cours de Patrice Marcotte (2001) et de Bernard Gendron (2007). L'exemple GAMS sur les échangeurs de chaleur est dû à Grossmann.





Thank goodness we don't have only serious problems, but ridiculous ones as well.

Edsger W. Dijkstra

# 5

## Réseaux

### 5.1 Graphes

Les graphes sont un outil puissant de modélisation. Ils interviennent naturellement dans la représentation de réseaux de transport ou de télécommunication, par exemple, mais également dans la représentation de structures relationnelles abstraites. Mathématiquement, un graphe  $G$  prend la forme  $G = (N, A)$  où  $N$  est un ensemble de *sommets* et  $A \subseteq N \times N$  un ensemble d'*arcs*. Le terme réseau est un terme générique désignant un graphe dont les sommets ou les arcs possèdent des attributs: coûts, capacités, longueurs, etc.

#### 5.1.1 Graphe orienté

**Exemple 37** (Réseau de distribution). *Nous reprenons l'exemple 5, illustré sur la Figure 5.1. Les liens entre les noeuds du graphe ne peuvent être parcourus que dans un sens précis; nous parlerons de graphe orienté. Les sommets du graphe sont  $A, B, C, D, E$ , et le graphe possède les arcs  $(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, E), (D, E), (E, D)$ .*

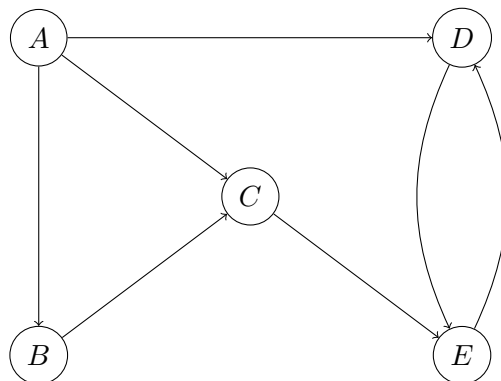


FIGURE 5.1 – Réseau de distribution

### 5.1.2 Graphe non orienté

**Exemple 38** (Parc Seervada). *Considérons le graphe représenté sur la Figure 5.2, tiré de Hillier et Lieberman [2], Section 9.1. Nous avons les sommets  $O, A, B, C, D, E, T$ , et les arêtes:  $\{O, A\}, \{O, B\}, \{O, C\}, \{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{D, E\}, \{D, T\}, \{E, T\}$ . Le nombre sur chaque arête représente la distance entre les deux sommets reliés par cette arête*

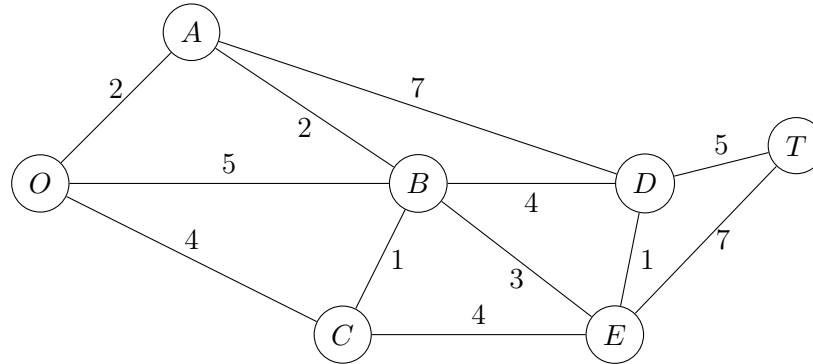


FIGURE 5.2 – Graphe non orienté

### 5.1.3 Transformations

Un graphe orienté dérivé d'un graphe non orienté en introduisant deux arcs pour chaque arête, un dans chaque direction. À l'inverse, nous qualifierons de graphe sous-jacent à un graphe orienté le graphe obtenu en enlevant l'orientation des arcs. Si  $G$  est un graphe orienté, le graphe dérivé du graphe sous-jacent à  $G$  n'est pas  $G$ .

### 5.1.4 Chemins et circuits

Un *chemin* [chaîne] est suite d'arcs [d'arêtes] distinct[e]s reliant deux sommets. Il est non orienté s'il est constitué d'une suite d'arcs distincts qui relient deux sommets, sans considération de l'orientation des arcs. En d'autres mots, un chemin non orienté est une chaîne dans le graphe sous-jacent. Un *circuit* [cycle] est un chemin [chaîne] qui commence et finit au même sommet. Le circuit est non orienté s'il s'agit d'un cycle dans le graphe sous-jacent.

**Exemple 39** (Réseau de distribution). *Reprenons l'exemple du réseau de distribution, illustré sur la Figure 5.3.  $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D$  décrit un chemin, et en ignorant l'orientation des arcs, nous décrivons également un chemin non orienté.  $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B$  est chemin non orienté, mais pas un chemin.  $D \rightarrow E \rightarrow D$  est circuit, et en omettant l'orientation des arcs, un circuit non orienté.  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  est un circuit non orienté (mais pas un circuit).*

### 5.1.5 Connexité

Deux sommets sont connexes s'il existe au moins un chemin non orienté les reliant. Un graphe est connexe si toute paire de sommets est connexe. Le plus petit graphe connexe à  $n$  sommets possède  $n - 1$  arêtes ; il est appelé un *arbre*. Une définition alternative consiste à dire qu'un arbre est un graphe connexe sans cycle. Un arbre partiel est un arbre obtenu à partir d'un graphe connexe en incluant tous les sommets.

**Exemple 40.** *Retournons sur l'exemple 38. Le graphe ci-dessous n'est pas un arbre partiel, comme il n'est pas connexe.*

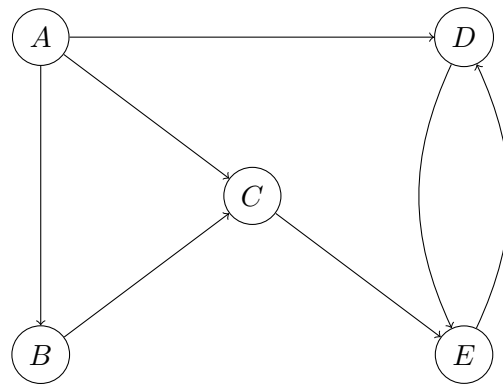
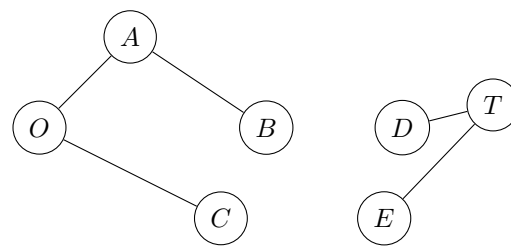
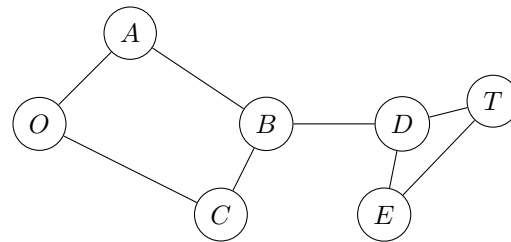


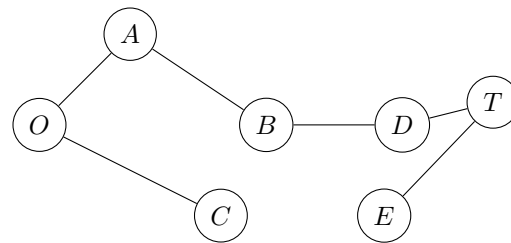
FIGURE 5.3 – Réseau de distribution



*Le graphe ci-dessous est connexe, mais présente des cycles. Par conséquent, il ne s'agit pas d'un arbre.*



*Le graphe ci-dessous est un arbre partiel.*



## 5.2 Problème du chemin le plus court - algorithmes de corrections d'éti- quettes

Considérons un graphe non orienté et connexe, sur lequel deux sommets ont un rôle particulier:

- source (ou origine):  $O$ ;
- puits (ou destination):  $T$ .

A chaque arête  $\{i, j\}$ , nous associons une distance  $c_{ij} \geq 0$ . Nous cherchons le chemin non orienté (ou chaîne) le plus court reliant  $O$  à  $T$ . Par chemin le plus court, nous désignons celui dont la distance totale (somme des distances des arêtes du chemin) est minimale parmi tous les chemins de  $O$  à  $T$ . Afin de procéder, nous affectons à chaque noeud du graphe une étiquette, représentant la meilleure distance connue à un moment donné, de l'origine à ce noeud.

### 5.2.1 Algorithme de Dijkstra

Il s'agit d'une méthode itérative. A chaque itération, nous choisissons le sommet  $j$  le plus près de  $O$  et nous fixons  $d(j)$ , la variable calculant la distance entre  $O$  et  $j$  (le sommet  $j$  est dit marqué). Au départ, seul  $O$  est marqué et  $d(O) = 0$ . Le sommet le plus près est choisi parmi les sommets non marqués reliés à au moins un sommet marqué. Le sommet choisi  $j$  est celui qui atteint

$$\min_{\text{sommets } k \text{ non marqués}} \left\{ \min_{\text{sommets } i \text{ marqués}} d(i) + c_{ik} \right\}.$$

$d(j)$  est fixée à cette valeur. Nous nous arrêtons lorsque  $T$  est marqué si nous cherchons à connaître le chemin allant de  $O$  à  $T$  spécifiquement, ou sinon jusqu'à avoir marqué tous les sommets. Par la suite, nous supposons dans la description que nous voulons marquer tous les sommets. Plus spécifiquement, nous avons l'algorithme ci-dessous. L'algorithme de Dijkstra s'applique aussi sur un graphe orienté.

**Algorithm 5.1:** Algorithme de Dijkstra

Soient  $G = (N, A)$  un graphe connexe, de longueur d'arêtes non-négative (la longueur des arêtes est donnée par une fonction  $\ell : A \rightarrow \mathcal{R}^+$ ), une source  $O \in N$ . Désignons par  $S$  l'ensemble des sommets marqués.

1. Initialisation. Pour tout  $u \in N$ , faire

- $\text{dist}(u) := \infty$ ;
- $\text{pred}(u) := \text{NULL}$ .

où  $\text{pred}(u)$  indique le prédécesseur de  $u$  sur le plus court chemin de  $O$  à  $u$ . Le noeud origine prend un rôle particulier, et comme il est évident que le plus court chemin de  $O$  à  $O$  a une longueur nulle, nous posons  $\text{dist}(O) = 0$ . Comme à ce stade, aucun noeud n'a encore été marqué, nous posons  $S = \emptyset$ .

2. Tant que  $S \neq N$ , prenons  $u$  tel que

$$\text{dist}(u) \leq \text{dist}(v), \quad \forall v \in N \setminus S.$$

Posons  $S := S \cup \{u\}$ , et, pour tout arc  $(u, v)$  existant, si

$$\text{dist}(v) > \text{dist}(u) + \ell(u, v),$$

posons

$$\begin{aligned} \text{dist}(v) &:= \text{dist}(u) + \ell(u, v), \\ \text{pred}(v) &= u. \end{aligned}$$

Il est possible de montrer qu'une fois un noeud  $u$  marqué,  $\text{dist}(u)$  donne la longueur du plus court chemin de  $O$  à  $u$ .

**Exemple 41.** L'application de l'algorithme de Dijkstra pour l'exemple 38, repris à la Figure 5.4, donne la série d'itérations résumée dans la Table 5.1.

Il est également possible de trouver les chemins les plus courts entre la source et tous les autres sommets (il suffit de regarder la valeur de  $d(i)$  en chaque sommet  $i$ ). Nous pouvons également trouver les chemins les plus courts entre toutes les paires de sommets, avec  $n$  applications de l'algorithme de Dijkstra (mais il est possible de faire mieux). Si certaines distances sont négatives, l'algorithme de Dijkstra ne s'applique cependant pas.

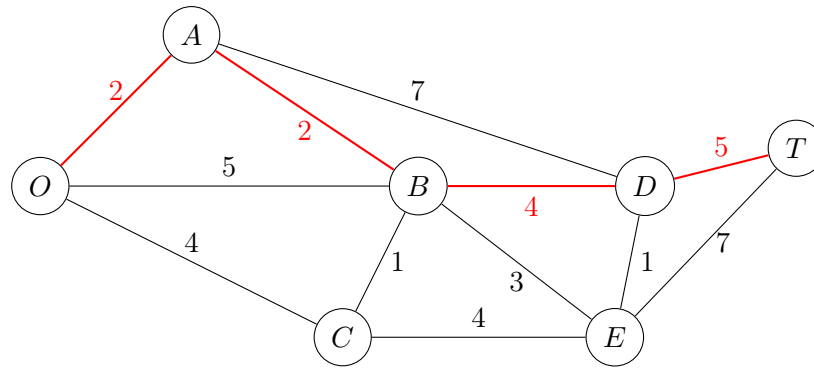


FIGURE 5.4 – Plus court chemin

Itération	Sommet marqué	$S$	$N \setminus S$	Voisins non marqués	Distance	Prédécesseur
0	-	$\emptyset$	$N$	-	-	-
1	$O$	$\{O\}$	$\{A, B, C, D, E, T\}$	$A$ $B$ $C$	2 5 4	$O$ $O$ $O$
2	$A$	$\{O, A\}$	$\{B, C, D, E, T\}$	$B$ $D$	4 9	$A$ $A$
3	$B$	$\{O, A, B\}$	$\{C, D, E, T\}$	$D$ $C$ $E$	8 4 7	$B$ $O$ $B$
4	$C$	$\{O, A, B, C\}$	$\{D, E, T\}$	$E$	7	$B$
5	$E$	$\{O, A, B, C, E\}$	$\{D, T\}$	$D$ $T$	8 14	$B$ $E$
6	$D$	$\{O, A, B, C, D, E\}$	$\{T\}$	$T$	13	$D$
7	$T$	$N$	$\emptyset$	-	-	-

TABLE 5.1 – Exécution de l'algorithme de Dijkstra

## 5.3 Flot dans un réseau

### 5.3.1 Réseau

- Un *réseau* est un graphe orienté ayant
- des capacités sur les arcs ;
  - des sommets d'offre (ou sources) ;
  - des sommets de demande (ou puits) ;
  - des sommets de transfert.

Le *flot* dans un réseau est le nombre d'unités circulant sur les arcs du réseau de façon à respecter les capacités et les contraintes de conservation de flot. En chaque sommet, le flot sortant moins le flot entrant vaut

- l'offre (si le sommet est une source) ;
- la demande (si le sommet est un puits) ;
- 0 (en un sommet de transfert).

Soit  $A$  est l'ensemble des arcs du réseau. En dénotant par  $x_{ij}$  la quantité de flot qui passe sur l'arc  $(i, j) \in A$ , nous avons

$$\sum_{(i,j) \in A^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A^-(i)} x_{ji} = b_i, \quad i, j \in N$$

où

- $b_i = 0$  (transfert), offre (source), -demande (puits) ;
- $N$  désigne l'ensemble des sommets ;
- $A^+(i)$  est l'ensemble des arcs sortants du sommet  $i$  ;
- $A^-(i)$  désigne l'ensemble des arcs entrants au sommet  $i$  ;

avec  $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ .

### 5.3.2 Modèle de flot

Le chemin le plus court peut être vu comme le flot dans un réseau, lequel est le graphe orienté dérivé. On enlève les arcs entrant à  $O$  et les arcs émanant de  $T$ .  $O$  est la seule source, avec une offre égale à 1.  $T$  est le seul puits, avec une demande valant 1. Le flot sur chaque arc  $(i, j)$  est soit 1, si l'arc appartient au chemin le plus court, soit 0, sinon.

### 5.3.3 Algorithme de Bellman-Ford

La déficience majeure de l'algorithme de Dijkstra est qu'en présence d'arcs (arêtes) de poids négatif, ajouter un arc à un chemin peut faire décroître la longueur de ce chemin, de sorte que lors du marquage d'un noeud  $u$ ,  $\text{dist}(u)$  ne correspond plus nécessairement à la longueur du plus court chemin de  $O$  à  $u$ . En particulier, si considérons le plus court chemin

$$O \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$$

de  $O$  à  $v_k$ , alors il n'est plus vrai que

$$d(O, v_i) \leq d(O, v_k) \quad \forall i < k.$$

Il est pourtant fréquent d'avoir des poids négatifs sur certains arcs. L'algorithme de Bellman-Ford permet de traiter de tels cas, pour autant qu'il n'y ait pas de cycles de longueur négative, c'est-à-dire un cycle dont les sommes des poids des arêtes est strictement négatif. En effet, s'il est possible d'atteindre de  $O$  un cycle  $C$  de longueur négative, et qu'il est possible d'atteindre  $T$  depuis  $C$ , alors la longueur du plus court chemin de  $O$  à  $T$  vaut  $-\infty$ .

Considérons un graphe  $G = (N, A)$  connexe, sans cycle négatifs. Il existe alors un chemin

$$O \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k = T.$$

Nous allons garder trace des distances à partir de  $O$ , en construisant pour chaque noeud des surestimations successives de la longueur du plus court chemin.

**Algorithm 5.2:** Algorithme de Bellman-Ford

Soient un graphe  $G = (N, A)$  connexe, sans cycle négatifs, un sommet source  $O$  et un sommet destination  $T$ .

1. Initialisation. Pour tout  $u \in N$ , posons  $\text{dist}(u) := \infty$  et  $\text{pred}(u) = \text{NULL}$ . Posons également  $\text{dist}(O) = 0$ . Poser  $i = 0$ .

2. Si  $i = |N| - 1$ , arrêt. Sinon, pour chaque arête  $\{u, v\}$ , posons

$$\text{dist}(v) := \min\{\text{dist}(v), \text{dist}(u) + \ell(u, v)\}.$$

Si  $\text{dist}(v)$  a été modifié, poser  $\text{pred}(v) = u$ . Mettre à jour  $i$ :

$$i := i + 1.$$

Retour en 2.

Considérons le plus court chemin  $O$  à  $T$ :

$$O \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k = T.$$

Pour chaque  $i \leq k$ ,

$$O \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_i.$$

est le plus court chemin de  $O$  à  $v_i$ . En effet

— après l'itération 1,  $\text{dist}(v_1) = d(O, v_1)$ ,

— après l'itération 2,  $\text{dist}(v_2) = d(O, v_2)$ ,

et ainsi de suite jusqu'à l'itération  $i$ .

### 5.3.4 Modèle du chemin critique (PERT/CPM)

La théorie des graphes est utilisée également en ordonnancement de tâches, en particulier sur base d'un diagramme de PERT<sup>1</sup>. Considérons un projet divisé en tâches diverses. Un graphe orienté connexe (acyclique) représente les relations de précédence entre les tâches, avec pour chaque étape du projet un noeud  $i$  correspond. L'arc  $(i, j)$  représente une tâche à effectuer, et nous lui associons une pondération  $t_{ij}$ , représentant la durée de la tâche. S'il existe également un arc  $(j, k)$ , cela signifie que la tâche  $(i, j)$  doit se terminer avant que  $(j, k)$  ne débute. Les noeuds 1 et  $N$  correspondent au début et à la fin du projet. Un chemin dans le graphe représente une séquence de travaux qui doivent être exécutés dans un certain ordre. Nous souhaitons connaître le temps requis pour terminer le projet (i.e. avoir effectué toutes les tâches, certaines pouvant s'accomplir en parallèle), ainsi que les activités critiques, c'est-à-dire celles qui déterminent le temps total du projet.

Un plus long chemin dans le réseau s'appelle un *chemin critique* et sa longueur correspond à la durée minimale du projet. Le poids d'un chemin critique est une borne inférieure du temps total nécessaire pour mener à bien le projet. Il est facile de calculer un tel chemin sur base des algorithmes de plus court chemin afin de trouver un tel chemin critique. Une première approche consiste à considérer l'opposé de chaque pondération  $t_{ij}$ , ce qui conduit à un graphe avec des poids négatifs. Dans ce cas, l'algorithme de Bellman-Ford s'appliquera, pour autant qu'il n'y ait pas de cycles<sup>2</sup>.

**Exemple 42.** *Nous souhaitons mener à bien le développement d'un nouveau produit, depuis sa production jusqu'au rapport de projet menant à sa vente. Nous avons la liste des activités reprises dans la Table 5.2, Dénnotons l'instant de départ par  $O$ . Nous pouvons représenter les différences tâches, et leurs dépendances, suivant le graphe de la Figure 5.5. Il est facile de voir que le chemin critique, de longueur 13, vaut*

$$O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J.$$

*Autrement dit, le projet prendra au minimum 13 mois, et les activités critiques sont, dans l'ordre, la conception du produit, la mise au point du prototype, son test et le rapport de projet. Les autres tâches peuvent s'effectuer en parallèle (en respectant les contraintes de précédence). Le noeud  $O$  ne correspond à aucune activité, mais permet de définir un point d'entrée dans le graphe. Le point de sortie peut être identifié à  $J$  car c'est l'unique activité*

1. PERT est un acronyme pour Program Evaluation and Review Technique

2. Pourquoi ?

terminale. Si plusieurs activités ont lieu de manière concomitantes en fin de projet, il n'y a pas d'activité terminale que nous pourrions identifier. Dans ce cas, nous ajoutons un noeud artificiel, disons  $T$ , et traçons un arc depuis chaque activité de fin vers ce noeud terminal  $T$ . Chaque arc portera le pondération à 0, ainsi nous ne modifions pas la durée du projet de manière arbitraire.

Activité	Description	Tâches préalables	Durée (mois)
A	Conception du produit	-	5
B	Recherche de marché	-	1
C	Analyse de production	A	2
D	Prototype	A	3
E	Brochure de vente	A	2
F	Analyse de coût	C	3
G	Test de produit	D	4
H	Entraînement de vente	B, E	2
I	Tarification	H	1
J	Rapport de projet	F, G, I	1

TABLE 5.2 – Tâches d'un projet commercial

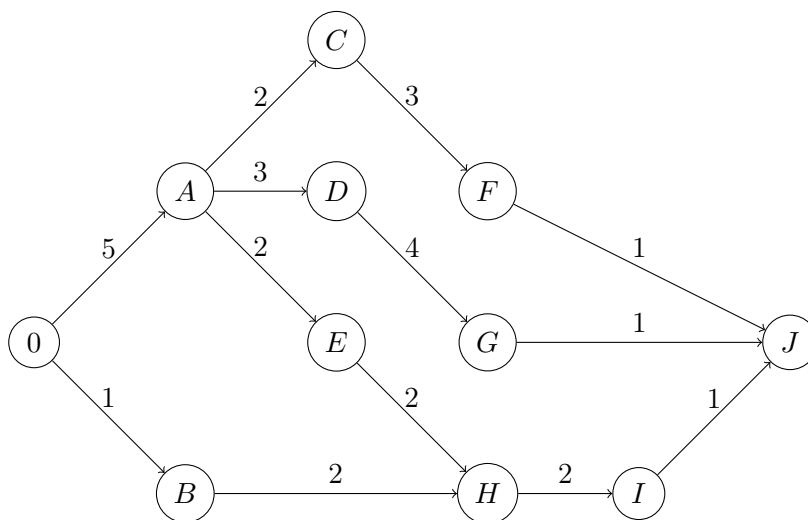


FIGURE 5.5 – Graphe du projet commercial

## 5.4 Problème de l'arbre partiel minimum

Considérons un graphe non orienté et connexe. A chaque arête  $\{i, j\}$ , nous associons une distance  $c_{ij} \geq 0$ . Nous cherchons à construire un arbre partiel (plus petit graphe connexe contenant tous les sommets) dont la somme des distances soit minimum parmi tous les arbres partiels du graphe. C'est un exemple simple de problème de conception de réseaux (network design): choisir une configuration de réseau (sous-ensemble d'arcs) qui optimise un certain critère.



### 5.4.1 Algorithme de Prim (1957)

Il s'agit à nouveau d'une approche itérative. L'algorithme est initialisé en choisissant un sommet  $i$  (arbitrairement) et en le reliant au sommet  $j$  le plus proche. En d'autres termes, nous ajoutons l'arête  $\{i, j\}$ . À chaque itération, nous choisissons le sommet non relié  $j$  le plus près d'un des sommets déjà reliés  $i$  et nous ajoutons  $\{i, j\}$ . Nous nous arrêtons lorsque tous les sommets ont été reliés. En cas d'égalité, nous pouvons choisir arbitrairement. De telles égalités indiquent qu'il pourrait y avoir plusieurs solutions optimales.

**Exemple 43.** *Considérons à nouveau l'exemple 38.*

1. L'initialisation consiste à choisir le sommet  $O$  et à le relier au sommet le plus près: on ajoute  $\{O, A\}$ .
2. Le sommet non relié le plus près de  $O$  ou de  $A$  est  $B$ ; comme il est plus près de  $A$ , on ajoute  $\{A, B\}$ .
3. Le sommet non relié le plus près de  $O$ , de  $A$  ou de  $B$  est  $C$ ; puisqu'il est plus près de  $B$ , on ajoute  $\{B, C\}$ .
4. Le sommet non relié le plus près d'un des sommets reliés est  $E$ ; nous ajoutons l'arête  $\{B, E\}$ ,
5. Le sommet non relié le plus près d'un des sommets reliés ( $E$ ) est  $D$ ; nous ajoutons l'arête  $\{E, D\}$
6. Le sommet non relié le plus près d'un des sommets reliés ( $D$ ) est  $T$ ; nous ajoutons l'arête  $\{D, T\}$ . Tous les sommets sont à présent reliés, aussi, nous nous arrêtons. La valeur optimale correspond à la somme des distances des arêtes ajoutées, soit 14.

L'arbre partiel minimum est représenté en rouge dans la Figure 5.6.

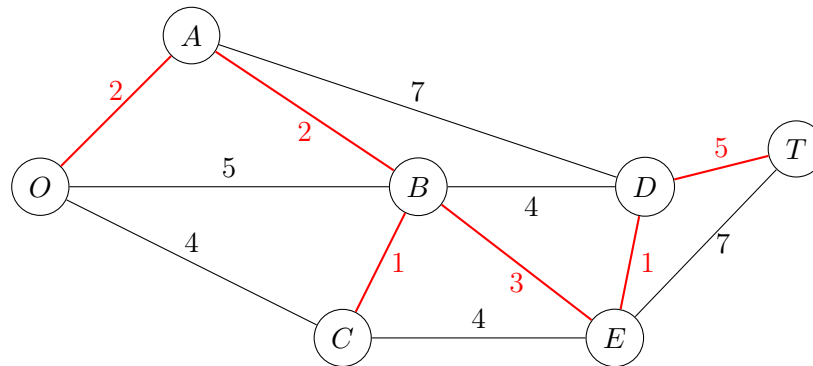


FIGURE 5.6 – Arbre partiel minimum

## 5.5 Problème du flot maximum

Considérons un graphe orienté et connexe. À chaque arc  $(i, j)$ , nous associons une capacité  $u_{ij} > 0$ . Il y a deux sommets spéciaux:

- source (ou origine)  $O$ ;
- puits (ou destination)  $T$ .

Tous les autres sont des sommets de transfert. L'offre en  $O$  et la demande en  $T$  sont variables. L'offre en  $O$  doit cependant correspondre à la demande en  $T$ , et indique la valeur du flot entre  $O$  et  $T$ . Nous cherchons à maximiser la valeur du flot entre  $O$  et  $T$ .

Supposons que nous avons déjà affecté un flot sur les arcs. La *capacité résiduelle* d'un arc  $(i, j)$  est comme

$$u_{ij} - x_{ij}$$

Nous définissons le *graphe résiduel* comme le graphe non orienté sous-jacent, où, sur chaque arête, nous associons deux valeurs: la capacité résiduelle et le flot déjà affecté.

**Exemple 44** (Parc Seervada). Continuons avec l'exemple 38, mais en considérant à présent un graphe orienté, comme sur la Figure 5.7. Supposons qu'en période de grande affluence, nous disposons d'une flotte d'autobus pour faire visiter les différents postes d'observation du parc. La réglementation limite le nombre d'autobus pouvant circuler sur chaque tronçon de route. Comment faire circuler les autobus dans le parc de façon à maximiser le nombre total d'autobus allant de l'origine ( $O$ ) à la destination ( $T$ ) ?

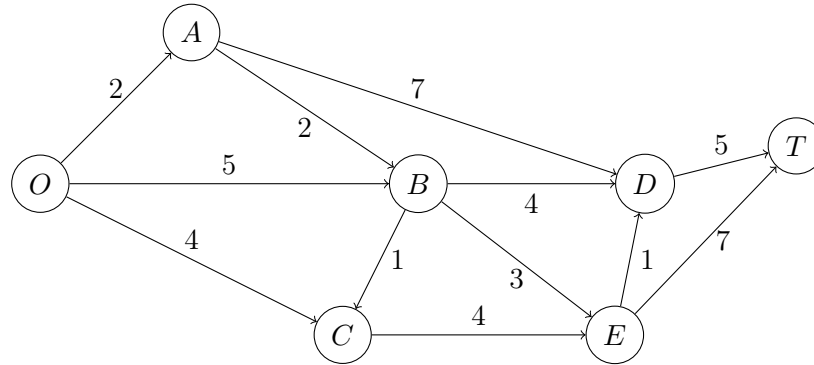
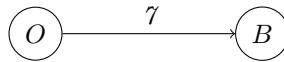
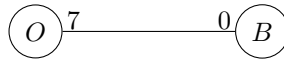


FIGURE 5.7 – Parc Seervada

Supposons par exemple que l'arc  $(O, B)$  a une capacité de 7, ce que nous représentons comme



Nous pouvons représenter l'arc comme une arête, en indiquant la capacité disponible au niveau du noeud origine, et le flot actuel, 0, au niveau de la destination.



Si nous affectons cinq unités de flot, nous pouvons représenter la capacité résiduelle au niveau de l'origine, et le flot au niveau de la destination, comme suit.



*Interprétation du graphe résiduel:* nous avons affecté 5 unités de flot sur l'arc  $(O, B)$ . Si nous traversons  $O \rightarrow B$ , 2 est la capacité résiduelle et le flot sur  $(O, B)$  vaut 5. Si nous traversons  $B \rightarrow O$ , la capacité résiduelle est 5 et le flot sur  $(B, O)$  vaut 2.

Un chemin d'augmentation est un chemin allant de la source au puits dans le graphe orienté dérivé du graphe résiduel. Pour chaque arête  $\{i, j\}$ , l'arc  $(i, j)$  possède une capacité résiduelle  $u_{ij} - x_{ij}$ , et l'arc  $(j, i)$  possède une capacité résiduelle  $x_{ij}$ . Chaque arc du chemin possède une capacité résiduelle strictement positive. La capacité résiduelle d'un chemin d'augmentation est le minimum des capacités résiduelles de tous les arcs du chemin.

### 5.5.1 Algorithme de Ford-Fulkerson

**Algorithm 5.3:** Ford-Fulkerson

1. Initialiser le flot: 0 unité sur chaque arc.
2. Si aucun chemin d'augmentation ne peut être identifié, arrêter: le flot est maximum.
3. Identifier un chemin d'augmentation  $P$ ; soit  $c$  sa capacité résiduelle.

4. Sur chaque arc de  $P$ 
  - (a) augmenter le flot de  $c$ ;
  - (b) diminuer la capacité résiduelle de  $c$ .
5. Retourner à l'étape 2.

**Algorithm 5.4:** Identifier un chemin d'augmentation

1. Marquer la source  $O$  (aucun autre sommet n'est marqué); tous les sommets sont non visités.
2. S'il n'y a aucun sommet marqué non visité, arrêter: il n'existe aucun chemin d'augmentation.
3. Choisir un sommet marqué non visité  $i$ .
4. Visiter  $i$ : pour chaque  $(i, j)$  de capacité résiduelle strictement positive dans le graphe orienté dérivé du graphe résiduel, marquer  $j$ .
5. Si  $T$  est marqué, arrêter: un chemin d'augmentation a été identifié.
6. Retour à l'étape 2.

**Exemple 45** (Parc Seervada: suite).

0. Le graphe résiduel initial est représenté sur la Figure 5.8.

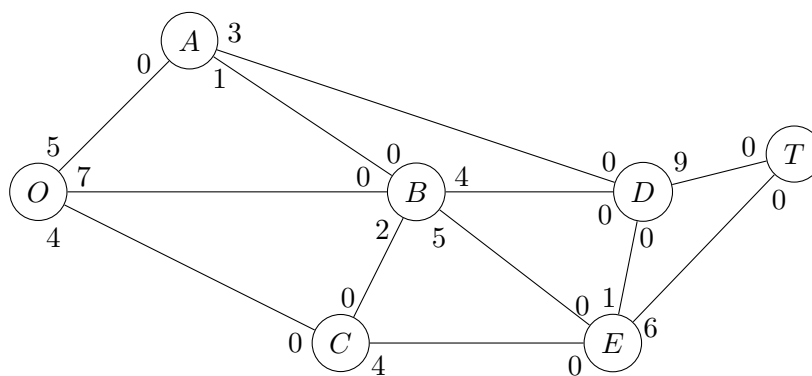


FIGURE 5.8 – Parc Seervada: initialisation.

1. Nous pouvons identifier le chemin d'augmentation  $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ . La capacité résiduelle vaut alors  $\min\{7, 5, 6\} = 5$ . En suivant l'algorithme, nous augmentons le flot et diminuons la capacité résiduelle de 5 unités sur tous les arcs de  $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ , ce qui conduit au graphe de la Figure 5.9.
2. Nous pouvons à présent identifier le chemin d'augmentation  $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$ , qui donne une capacité résiduelle de  $\min\{5, 3, 9\} = 3$ . Nous augmentons le flot et diminuons la capacité résiduelle de 3 unités sur tous les arcs de  $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$ , comme représenté sur la Figure 5.10.
3. Nous avons le chemin d'augmentation  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , et la capacité résiduelle  $\min\{2, 1, 4, 6\} = 1$ . Augmentons le flot et diminuons la capacité résiduelle de 1 unité sur tous les arcs de  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , pour obtenir la Figure 5.11.
4. Identifions le chemin d'augmentation  $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , ce qui donne comme capacité résiduelle  $\min\{2, 3, 5\} = 2$ . Nous augmentons le flot et diminuons la capacité résiduelle de 2 unités sur tous les arcs de  $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , ce qui conduit à la Figure 5.12.
5. Prenons le chemin d'augmentation  $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ , avec comme capacité résiduelle  $\min\{4, 4, 1, 3\} = 1$ . Ceci nous conduit à augmenter le flot et à diminuer la capacité résiduelle de 1 unité sur tous les arcs de  $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ . Nous obtenons ainsi le graphe de la Figure 5.13.

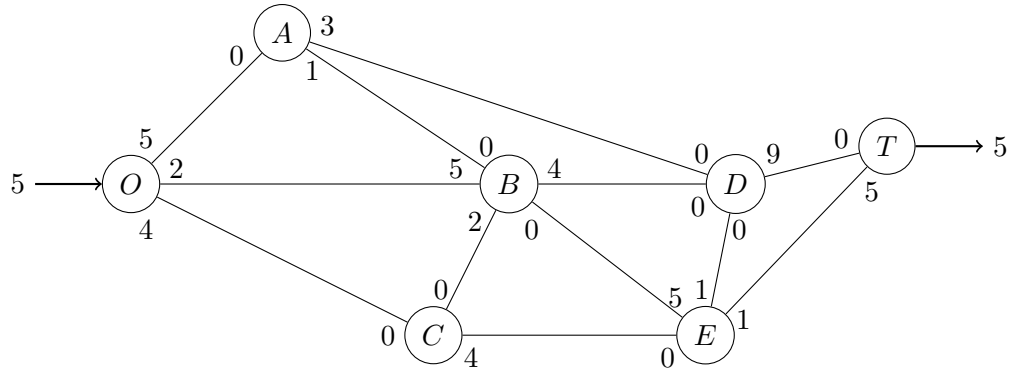


FIGURE 5.9 – Parc Seervada: itération 1.

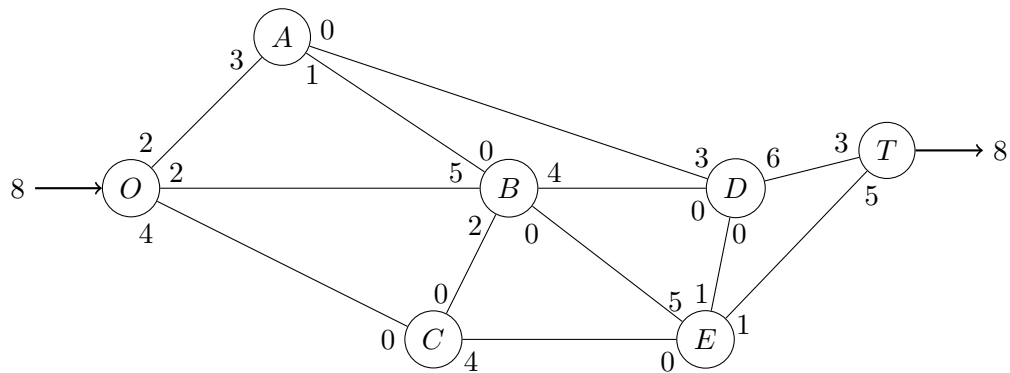


FIGURE 5.10 – Parc Seervada: itération 2.

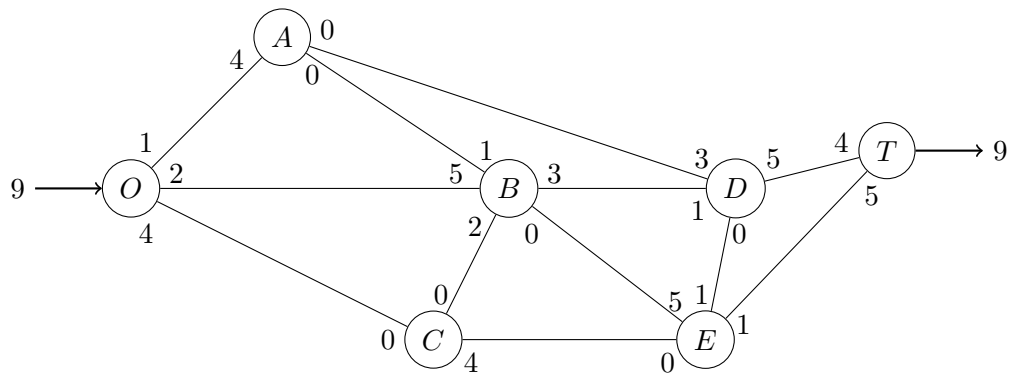


FIGURE 5.11 – Parc Seervada: itération 3.

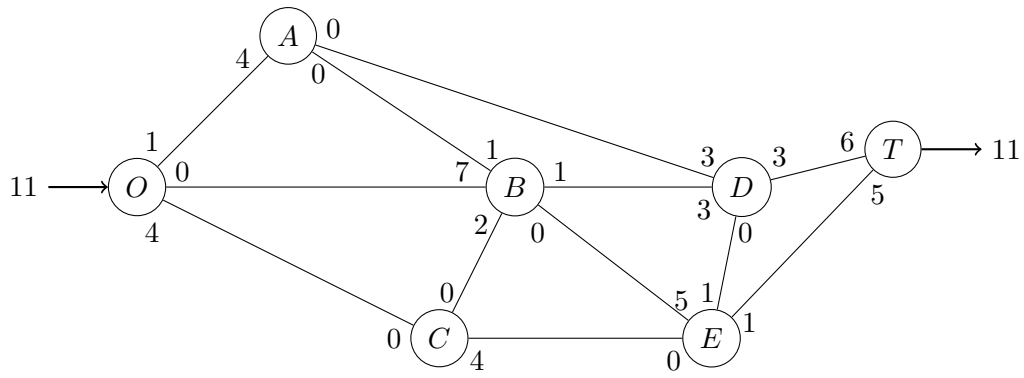


FIGURE 5.12 – Parc Seervada: itération 4.

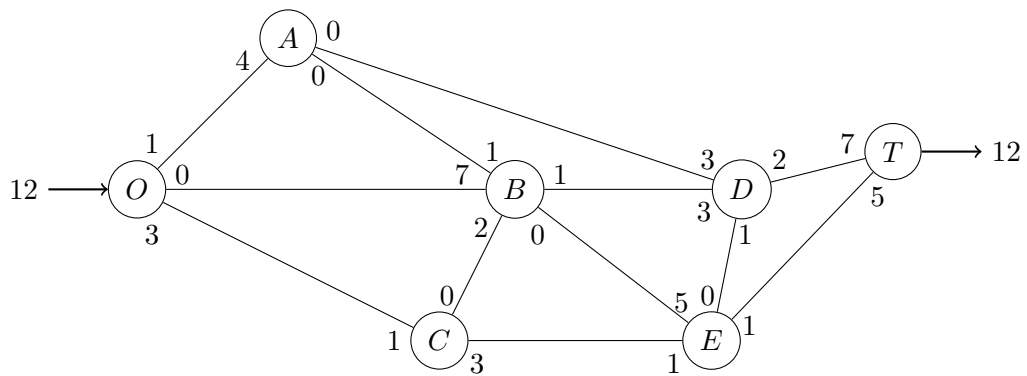


FIGURE 5.13 – Parc Seervada: itération 5.

6. Nous pouvons choisir le chemin d'augmentation  $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ . La capacité résiduelle est  $\min\{3, 3, 1\} = 1$ . En augmentant le flot et en diminuant la capacité résiduelle de 1 unité sur tous les arcs de  $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ , nous obtenons la Figure 5.14.

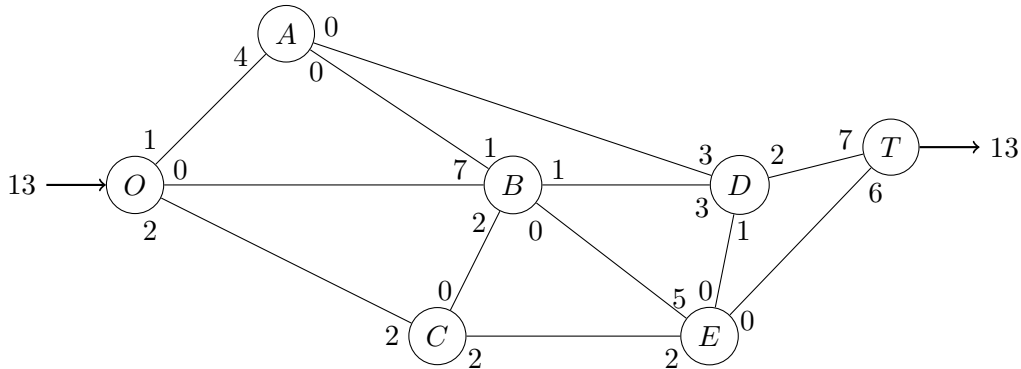


FIGURE 5.14 – Parc Seervada: itération 6.

7. Considérons le chemin d'augmentation:  $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , de capacité résiduelle  $\min\{2, 2, 5, 1, 2\} = 1$ . Par conséquent, nous augmentons le flot et diminuons la capacité résiduelle de 1 unité sur tous les arcs de  $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , ce qui donne la Figure 5.15.

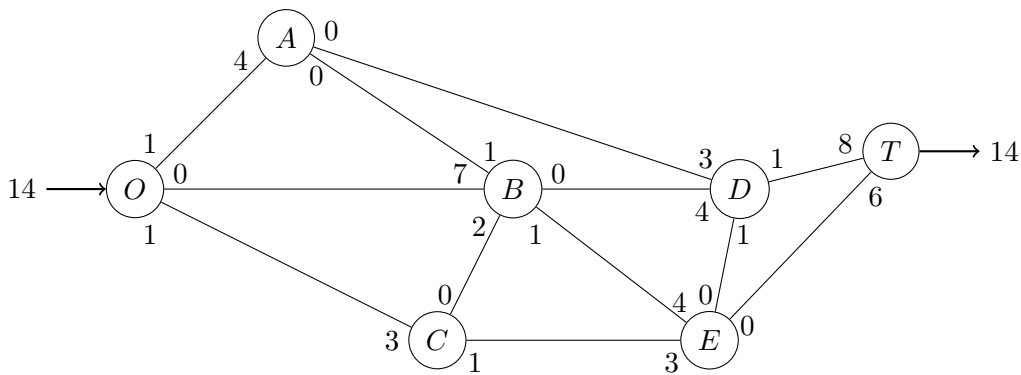


FIGURE 5.15 – Parc Seervada: itération 7.

8. Il n'y a plus aucun chemin d'augmentation possible; nous avons atteint le flot maximum, lequel est réparti comme représenté sur la Figure 5.16.

### 5.5.2 Flot maximum - Coupe minimum

Supposons que nous partitionnions l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles  $X$ ,  $Y$ . Une coupe est un sous-ensemble d'arcs allant d'un sommet de  $X$  vers un sommet de  $Y$ . La capacité d'une coupe est la somme des capacités des arcs de la coupe. Une coupe minimum est une coupe dont la capacité est minimum parmi toutes les coupes possibles. Le théorème flot max-coupe min dit que la valeur du flot maximum est égale à la capacité d'une coupe minimum. Les sommets marqués lors de la dernière itération de l'algorithme de Ford-Fulkerson définissent la coupe minimum, comme illustré sur la Figure 5.17 pour l'exemple du parc Seervada.

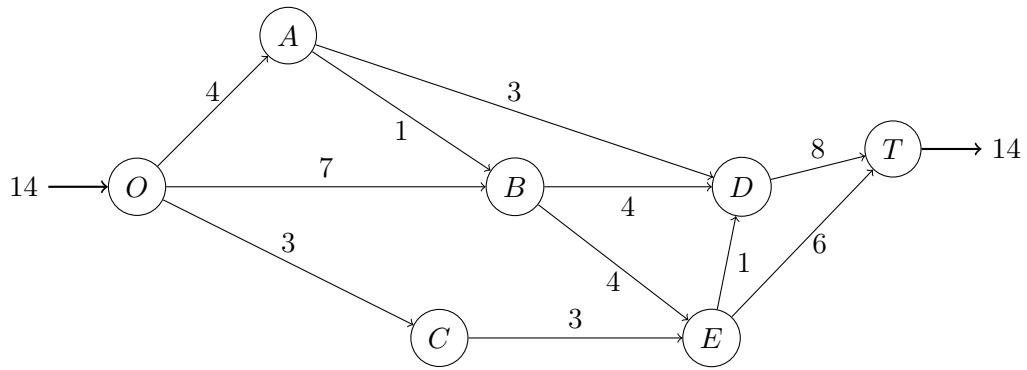


FIGURE 5.16 – Parc Seervada: fin.

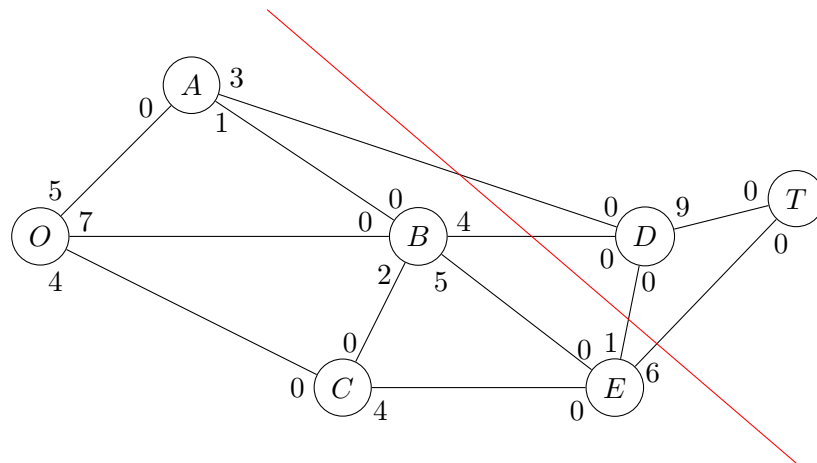


FIGURE 5.17 – Parc Seervada: coupe minimum.

## 5.6 Problème de flot minimum

Plutôt que de maximiser le flot sur le réseau, nous pourrions chercher à trouver la façon la plus économique d'envoyer un certain flot à travers un réseau. Considérons un réseau de flot  $G(N, A)$ , avec une source  $s \in N$  et un puits  $t \in N$ . On veut envoyer le flux  $d$  de  $s$  à  $t$ . Soient  $\ell(i, j)$  le coût unitaire sur l'arête  $\{i, j\}$ , et  $f(i, j)$  le flot  $\{i, j\}$ . Nous avons le problème linéaire

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j \in N} \ell(i, j) f(i, j), \\ & f(i, j) \leq c_{ij}, \\ & f(i, j) = -f(j, i), \\ & \sum_{k \in N} f(i, k) = 0, \quad \forall k \neq s, t, \\ & \sum_{k \in N} f(s, k) = \sum_{k \in N} f(k, t) = d. \end{aligned}$$

## 5.7 Exercices

- Formulez le problème de plus court chemin comme un problème de programmation linéaire.  
Astuce: on peut voir la longueur d'un chemin comme le coût total payé par une unité de flot voyageant de l'origine à la destination, le coût d'un arc étant sa longueur.
- Considérons la construction d'une maison, et nous voulons connaître la durée des travaux préliminaires. Cinq tâches sont considérées.

Tâche	Description	Durée (jours)
1	Exécution des terrassements	10
2	Mise en place de la grue	2
3	Fondations	5
4	Branchement électrique	3
5	Installation de la fosse septique	6

Nous avons les contraintes suivantes:

- la grue ne peut fonctionner que si le branchement électrique est effectué, mais sa mise en place peut se faire en parallèle du branchement électrique;
- nous avons besoin de la grue pour les fondations;
- l'installation de fosse septique et les fondations ne peuvent être exécutés que si les travaux de terrassement sont terminés.

Quelle est la durée minimale totale des travaux? Soyez précis dans le développement de votre réponse.

## 5.8 Notes

Ce chapitre se base partiellement sur les notes de cours de Bernard Gendron, 2007. La section sur les plus courts chemins repose également sur du matériel de cours mis en ligne par Otfried Cheong.



# 6

## Modèles stochastiques

### 6.1 Concepts de base

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat n'est pas connu avec certitude. Supposons que tous les résultats possibles de cette expérience soient connus. L'espace d'échantillonnage  $\Omega$  est cet ensemble de résultats possibles d'une expérience aléatoire.

**Exemple 46** (Espace d'échantillonnage).

- *Tirage d'une pièce de monnaie:*  $\Omega = \{P, F\}$ .
- *Lancement d'un dé:*  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- *Temps écoulé avant l'arrivée d'un premier client dans un magasin ouvert durant 8 heures, depuis son ouverture:*  $\Omega = [0, 8]$ .

Un événement  $E$  est un sous-ensemble de l'espace d'échantillonnage. Supposons que nous répétions l'expérience aléatoire un grand nombre de fois ( $n$ ), et que l'événement  $E$  se produise  $m$  fois. La probabilité associée à l'événement  $E$  peut être approchée comme

$$P[E] \approx \frac{m}{n}.$$

Une définition empirique de la probabilité de  $E$  est (en version fréquentiste)

$$P[E] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n},$$

De manière plus formelle

**Definition 1.**  $P$  est une mesure de probabilité si

- $0 \leq P[E] \leq 1$ , pour tout  $E \subset \Omega$ ;
- $P[\emptyset] = 0$  et  $P[\Omega] = 1$ ;
- $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2]$ , si  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints (i.e.  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ).

**Exemple 47.** *Tirage d'une pièce de monnaie:*  $P[\{P\}] = P[\{F\}] = 0.5$ .

L'occurrence un événement  $E_1$  se produit peut influencer la probabilité d'un autre événement  $E_2$ . Par exemple, la probabilité qu'il pleuve demain ( $E_2$ ) est plus élevée s'il pleut aujourd'hui ( $E_1$ ) que s'il ne pleut pas. Si  $P[E_1] > 0$ , nous définissons la probabilité conditionnelle associée à l'événement  $E_2$ , étant donné  $E_1$ , comme:

$$P[E_2 | E_1] = \frac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_1]}.$$

La probabilité conditionnelle jouit des propriétés suivantes:

- $0 \leq P[E_2 | E_1] \leq 1$ ;
- $P[\emptyset | E_1] = 0$  et  $P[\Omega | E_1] = 1$ ;
- $P[E_2 \cup E_3 | E_1] = P[E_2 | E_1] + P[E_3 | E_1]$ , si  $E_2$  et  $E_3$  sont disjoints.

Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont indépendants si

$$P[E_2 | E_1] = P[E_2].$$

De manière alternative, nous pouvons utiliser les définitions suivantes:

$$\begin{aligned} P[E_1 | E_2] &= P[E_1] \\ P[E_1 \cap E_2] &= P[E_1]P[E_2]. \end{aligned}$$

En général, nous postulons l'indépendance de deux événements pour se servir des définitions ci-dessus, plutôt que de déduire l'indépendance de deux événements à partir des définitions.  $K$  événements  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sont indépendants si

$$P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k] = P[E_1]P[E_2] \dots P[E_k].$$

## 6.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire  $X$  est une fonction qui associe une valeur numérique  $X(s)$  à chaque élément  $s$  de l'espace d'échantillonnage:

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{R}.$$

Il existe deux types principaux de variables aléatoires:

- variable aléatoire continue: valeurs réelles;
- variable aléatoire discrète: valeurs entières ou nombre fini de valeurs.

**Exemple 48** (Lancer de dés). *Considérons l'expérience aléatoire du lancer de deux dés. L'espace d'échantillonnage est  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$ . Une variable aléatoire  $X$  serait la somme des résultats des deux dés. Ainsi, par exemple,*

$$P[X = 2] = P[s \in \Omega : X(s) = 2] = P[(1, 1)] = \frac{1}{36};$$

$$P[X \leq 4] = P[s \in \Omega : X(s) \leq 4] = P[(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

La fonction de répartition associée à une variable aléatoire  $X$  est définie comme

$$F_X(b) = P[X \leq b] = P[s \in \Omega | X(s) \leq b],$$

Elle a comme propriétés:

- non décroissante;
- $\lim_{b \rightarrow -\infty} F_X(b) = 0$  et  $\lim_{b \rightarrow \infty} F_X(b) = 1$ ;
- $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$ , vu que

$$\{s \in \Omega : X(s) \leq b\} = \{s \in \Omega : X(s) \leq a\} \cup \{s \in \Omega : a < X(s) \leq b\}.$$

**Exemple 49** (Lancer de dés). *Soit  $X$  la somme des résultats des deux dés. Nous avons*

$$F_X(1) = P[X \leq 1] = 0;$$

$$F_X(2) = P[X \leq 2] = P[X = 2] = \frac{1}{36};$$

$$F_X(4) = P[X \leq 4] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$F_X(12) = P[X \leq 12] = 1.$$

### 6.2.1 Variables aléatoires discrètes

La fonction de masse associée à une variable aléatoire  $X$  est définie comme

$$P_X(k) = P[X = k] = P[s \in \Omega : X(s) = k].$$

Pour une variable aléatoire discrète, nous avons

$$F_X(b) = P[X \leq b] = \sum_{k \leq b} P[X = k] = \sum_{X \leq b} P_X(k).$$

aussi,

$$P[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a) - P_X(b).$$

**Exemple 50** (Lancer de dés). *Soit  $X$  la somme des résultats des deux dés. Alors,*

$$F_X(2) = P[X \leq 2] = P[X = 2] = P_X(2) = \frac{1}{36};$$

$$F_X(4) = P[X \leq 4] = P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

### 6.2.2 Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire  $X$  est continue si sa fonction de répartition peut être représentée ainsi:

$$F_X(b) = \int_{-\infty}^b f_x(x) dx.$$

La fonction sous l'intégrale est appelée fonction de densité et satisfait les conditions suivantes:

$$f_x(x) \geq 0, \forall x;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

Si la fonction de densité est continue, alors elle est égale à la dérivée de la fonction de répartition:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x).$$

La fonction de masse prend toujours la valeur 0:

$$P_X(x) = 0, \forall x.$$

Pour tout intervalle de la forme  $\langle a, b \rangle$ , nous avons également

$$P[X \in \langle a, b \rangle] = \int_a^b f(x) dx = F_X(b) - F_X(a).$$

### 6.2.3 Espérance mathématique

L'espérance mathématique (moyenne) associée à une variable aléatoire  $X$  est dénotée  $E[X]$  et définie comme suit:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_k k P_X(k) = \sum_k k P[X = k] & \text{si } X \text{ est discrète,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

**Exemple 51** (Lancer de deux dés). *Soit  $X$  la somme des résultats des deux dés.*

$$E[X] = \sum_k k P[X = k] = \sum_{k=2, \dots, 12} k P[X = k] = 7.$$

Nous pouvons également considérer l'espérance d'une fonction  $g(X)$ . Si  $X$  est une variable aléatoire discrète, cela donne

$$E[g(X)] = \sum_k g(k)P_X(k).$$

Pour une variable continue, nous aurons

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

En particulier, nous avons, si  $a \in \mathcal{R}$  et  $X, Y$  sont deux variables aléatoires,

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X], \\ E[X + Y] &= E[X] + E[Y]. \end{aligned}$$

### 6.2.4 Variance

La variance associée à une variable aléatoire  $X$ , dénotée  $\sigma^2(X)$ , est définie par la formule

$$\sigma^2(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[(X - E[X])^2].$$

**Exemple 52** (Lancer de deux dés). *Soit  $X$  la somme des résultats des deux dés.*

$$\sigma^2(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_k k^2 P[X = k] - E[X]^2 \approx 5.833.$$

## 6.3 Loi de probabilité

Une loi de probabilité est un modèle d'une expérience aléatoire. Elle est habituellement représentée par la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Si cette dernière est discrète, la loi de probabilité est dite discrète. Une loi de probabilité discrète peut être représentée par sa fonction de masse. Si la variable aléatoire est continue, la loi de probabilité est dite continue, et peut être représentée par sa fonction de densité.

### 6.3.1 Loi de Bernoulli

L'espace d'échantillonnage se limite à deux éléments, dénotés par exemple par  $\Omega = \{S, E\}$ . Nous définissons la variable aléatoire  $X$  comme suit:

$$X(S) = 1 \text{ et } X(E) = 0.$$

La fonction de masse est

$$P_X(1) = p \text{ et } P_X(0) = 1 - p,$$

où  $p$  est un paramètre. De manière équivalente, nous pouvons l'écrire comme

$$P_X(x) = p^x(1 - p)^{1-x}.$$

Nous avons de plus

$$E[X] = p \text{ et } \sigma^2(X) = p(1 - p).$$

Par exemple, le tirage d'une pièce de monnaie suit une loi de Bernoulli, avec  $p=1/2$ .

### 6.3.2 Loi uniforme

Une variable aléatoire continue  $X$  (qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[a, b]$ ) suit une loi uniforme (notée  $U[a, b]$ ) si sa fonction de densité est:

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Celle loi modélise l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un point de  $[a, b]$  (la probabilité de choisir un point dans un sous-intervalle est proportionnelle à la longueur de ce sous-intervalle).

Si  $X$  est une variable aléatoire continue (quelconque), nous avons la propriété suivante:

$$F_X(x) \sim U[0, 1].$$

### 6.3.3 Loi de Poisson

Une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Poisson est une variable aléatoire qui sert à compter le nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire durant un intervalle de temps de longueur  $t$ . Il pourrait s'agir par exemple du nombre d'appels reçus par un téléphoniste.  $X$  a alors pour fonction de masse

$$P_X(k) = P[X = k] = \frac{(\theta t)^k e^{-\theta t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

où  $\theta$  représente le taux moyen.

**Exemple 53** (Téléphoniste). *Un téléphoniste reçoit en moyenne 2 appels par minute; quelle est la probabilité de recevoir moins de 5 appels en 4 minutes? Nous avons*

$$P[X < 5] = \sum_{k=0}^4 P_X(k) = \sum_{k=0}^4 \frac{8^k e^{-8}}{k!} \approx 0.1.$$

### 6.3.4 Loi exponentielle

Soit une variable aléatoire  $X$  représentant le temps d'attente entre deux apparitions du phénomène aléatoire en supposant que le nombre d'apparitions durant un intervalle  $t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta$ . La fonction de répartition vérifie alors

$$1 - F_X(x) = P[X > x] = e^{-\theta x}, \quad x \geq 0.$$

Il s'agit de la loi exponentielle de fonction de densité:

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance mathématique est:

$$E[X] = \frac{1}{\theta}.$$

C'est le taux moyen entre deux apparitions du phénomène aléatoire.

## 6.4 Modèles stochastiques

Un système stochastique est un système évoluant de manière probabiliste dans le temps. Les exemples sont nombreux, avec par exemple la température quotidienne ou un centre d'appels téléphoniques. Un modèle stochastique est une représentation mathématique d'un système stochastique. Nous verrons brièvement deux cas classiques de modèles stochastiques: les processus stochastiques et les files d'attente.

### 6.4.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires évoluant dans le temps, que nous dénoterons  $\{X_t\}$ ,  $t \in T$ . En général,  $T$  est un ensemble discret:  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ . De plus, chaque variable aléatoire peut prendre une valeur parmi  $M + 1$  états:  $X_t \in \{0, 1, \dots, M\}$ .

**Exemple 54** (Précipitations quotidiennes).

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a des précipitations,} \\ 0 & \text{s'il n'y a pas de précipitations.} \end{cases}$$

### 6.4.2 Chaînes de Markov

Un processus stochastique est une chaîne de Markov s'il possède la propriété markovienne:

$$P[X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i] = P[X_{t+1} = j \mid X_t = i].$$

Cette propriété signifie que la probabilité d'un événement futur, étant donné des événements passés et un état au temps présent, ne dépend pas du passé, mais uniquement de l'état actuel. La probabilité de transition entre les états  $i$  et  $j$  est définie comme

$$p_{ij} = P[X_{t+1} = j \mid X_t = i].$$

Cette probabilité de transition est dite stationnaire si:

$$P[X_{t+1} = j \mid X_t = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i], \quad t = 1, 2, \dots$$

Puisqu'il s'agit de probabilité, nous devons en outre avoir

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, M\};$$

$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1 \geq 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, M\}.$$

À partir des probabilités de transition, nous pouvons construire

- La matrice des transitions, ayant  $M + 1$  rangées (les états présents) et  $M + 1$  colonnes (les états futurs), chaque entrée  $(i, j)$  de la matrice correspondant à  $p_{ij}$ .
- Le graphe (ou diagramme) des transitions, ayant  $M + 1$  sommets et tel qu'il y a un arc entre les états  $i$  et  $j$  si  $p_{ij} > 0$ .

**Exemple 55** (Précipitations). *Supposons que la probabilité qu'il n'y ait pas de précipitations à Montréal demain, étant donné:*

- *qu'il n'y en a pas aujourd'hui est 0.8;*
- *qu'il y en a aujourd'hui : 0.6.*

*Ces probabilités ne changent pas, même si nous tenons compte de ce qui se passe avant aujourd'hui. La propriété markovienne est satisfaite:*

$$P[X_{t+1} = 0 \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0] = P[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0]$$

$$P[X_{t+1} = 0 \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1] = P[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1]$$

*Nous avons donc une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont:*

$$p_{00} = P[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0] = 0.8,$$

$$p_{10} = P[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1] = 0.6.$$

*Grâce aux propriétés des probabilités de transition, nous pouvons déduire celles qui manquent :*

$$p_{01} = P[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0] = 1 - 0.8 = 0.2.$$

$$p_{11} = P[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1] = 1 - 0.6 = 0.4.$$

*Ceci donne la matrice de transition:*

$$[P] = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

*Le graphe de transition est quant à lui représenté sur la Figure 6.1.*

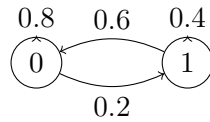


FIGURE 6.1 – Graphe de transition

**Exemple 56** (Marché boursier). À la fin de chaque jour, nous enregistrons le prix de l'action de Google au marché de Wall Street:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{si le prix de l'action n'a pas augmenté à la fin du jour } t; \\ 0 & \text{si le prix de l'action a augmenté à la fin du jour } t. \end{cases}$$

Nous supposons de plus que la probabilité que le prix augmente demain étant donné qu'il a augmenté aujourd'hui est de 0.7, et qu'il n'a pas augmenté aujourd'hui, 0.5. Nous avons une chaîne de Markov avec comme matrice de transition:

$$[P] = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Supposons maintenant que la probabilité que le prix de l'action augmente demain dépend non seulement de ce qui est arrivé aujourd'hui, mais également de ce qui est arrivé hier. Le processus stochastique défini précédemment n'est alors plus une chaîne de Markov. Nous pouvons néanmoins nous en sortir en introduisant un état pour chaque combinaison d'états possibles sur deux jours consécutifs. Nous définissons alors le processus stochastique suivant, où l'indice  $t$  représente deux jours consécutifs:

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier et aujourd'hui;} \\ 3 & \text{si le prix de l'action n'a pas augmenté, ni hier, ni aujourd'hui;} \\ 2 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier, mais pas aujourd'hui;} \\ 1 & \text{si le prix de l'action a augmenté aujourd'hui, mais pas hier.} \end{cases}$$

Remarquons qu'il est impossible de passer de l'état 0 au temps  $t$  à l'état 1 au temps  $t+1$ , car  $X_t = 0$ , si le prix augmente hier et aujourd'hui, et  $X_{t+1} = 1$ , si le prix augmente demain, mais pas aujourd'hui. La probabilité que le prix de l'action augmente demain vaut

- s'il a augmenté hier et aujourd'hui: 0.9;
- s'il a augmenté aujourd'hui, mais pas hier: 0.6;
- s'il a augmenté hier, mais pas aujourd'hui: 0.5;
- s'il n'a pas augmenté, ni hier, ni aujourd'hui: 0.3.

La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

## 6.5 Notes

Ce chapitre se base essentiellement sur les notes de cours de Bernard Gendron, 2007.





# 7

## Programmation dynamique

Supposons un problème décomposé en étapes. Chaque étape possède un certain nombre d'états correspondant aux conditions possibles au début d'une étape. À chaque étape, nous devons prendre une décision qui associe à l'état courant l'état au début de la prochaine étape. Dans le cas d'un problème d'optimisation, la programmation dynamique identifie une politique optimale: une décision optimale à chaque étape pour chaque état possible.

### 7.1 Principe d'optimalité de Bellman

Étant donné un état courant, la politique optimale pour les étapes à venir est indépendante des décisions prises aux étapes précédentes. Lorsque ce principe est satisfait, nous pouvons recourir à l'approche suivante pour résoudre un problème ayant  $N$  étapes:

- identifier une décision optimale pour la dernière étape ( $N$ );
- pour chaque étape  $n$ , de  $N - 1$  à 1: étant donné une politique optimale pour l'étape  $n + 1$ , identifier une politique optimale pour l'étape  $n$  au moyen d'une relation de récurrence.

Lorsque  $n = 1$ , nous obtenons une politique optimale pour le problème.

Nous utiliserons les notations suivantes:

- $N$ : nombre d'étapes;
- $n$ : indice de l'étape courante;
- $s_n$ : état au début de l'étape  $n$ ;
- $x_n$ : variable de décision associée à l'étape  $n$ ;
- $f_n(s_n, x_n)$ : contribution des étapes  $n, n + 1, \dots, N$ , à la valeur de l'objectif lorsqu'on se trouve à l'état  $s_n$  au début de l'étape  $n$ , que la décision est  $x_n$ , et que des décisions optimales sont prises par la suite;
- $x_n^*$ : solution optimale à l'étape  $n$ ;
- $f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*) = \min\{f_n(s_n, x_n)\}$  ou  $\max\{f_n(s_n, x_n)\}$ .

À chaque itération de la méthode, on construira un tableau représentant

- la liste des états possibles à l'étape  $n$ ;
- les valeurs possibles de la variable  $x_n$ ;
- la contribution à la valeur de l'objectif  $f_n(s_n, x_n)$ ;
- la valeur optimale  $f_n^*(s_n)$  et la solution optimale  $x_n^*$ .

$s_n$	$x_n = a$	$x_n = b$	$x_n = c$	$f_n^*(s_n)$	$x_n^*$
1	$f_n(1, a)$	$f_n(1, b)$	$f_n(1, c)$	$f_n^*(1)$	
2	$f_n(2, a)$	$f_n(2, b)$	$f_n(2, c)$	$f_n^*(2)$	

Semaine	Production max, temps régulier	Production max, temps supp.	Coût unitaire, temps régulier
1	2	2	300\$
2	3	2	500\$
3	1	2	400\$

TABLE 7.1 – Coûts de production

**Exemple 57** (Production-inventaire). Une compagnie doit fournir à son meilleur client trois unités du produit  $P$  durant chacune des trois prochaines semaines. Les coûts de production sont donnés dans la Table 7.1. Le coût pour chaque unité produite en temps supplémentaire est 100\$ de plus que le coût par unité produite en temps régulier. Le coût unitaire d'inventaire est de 50\$ par semaine. Au début de la première semaine, il y a deux unités du produit dans l'inventaire. La compagnie ne veut plus rien avoir dans son inventaire au bout des trois semaines. Combien doit-on produire d'unités chaque semaine afin de rencontrer la demande du client, tout en minimisant les coûts ?

Une étape correspond ici à une semaine,  $N = 3$ ,  $n = 1, 2, 3$ , et

- $s_n$ , l'état au début de la semaine  $n$ , est le nombre d'unités de produit dans l'inventaire ;
- $x_n$ : nombre d'unités produites lors de la semaine  $n$  ;
- $s_{n+1} = s_n + x_n - 3$  (puisque nous devons livrer 3 unités au client à chaque semaine) ;
- $s_1 = 2$  (puisque'il y a 2 unités au début).

Soient  $c_n$ , le coût unitaire de production au cours de la semaine  $n$ ,  $r_n$  la production maximale en temps régulier pendant la semaine  $n$ , et  $m_n$  la production maximale durant la semaine  $n$ . Le coût au cours de la semaine  $n$  est

$$p_n(s_n, x_n) = c_n x_n + 100 \max(0, x_n - r_n) + 50 \max(0, s_n + x_n - 3).$$

Le coût total vaut dès lors

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(s_n, x_n) + f_{n+1}^*(s_{n+1}),$$

et le coût optimal répond à la récurrence

$$f_n^*(s_n) = \min\{p_n(s_n, x_n) + f_{n+1}^*(s_{n+1}) \mid 3 - s_n \leq x_n \leq m_n\}.$$

Si  $n = 3$ , nous devons poser

$$f_4^*(s_4) = 0.$$

De plus,

$$s_4 = 0 = s_3 + x_3 - 3,$$

aussi

$$x_3 = 3 - s_3.$$

Calculons d'abord les valeurs  $f_3^*(s_3)$  et  $x_3^*$ . Nous obtenons le tableau

$s_3$	$f_3(s_3, 3 - s_3)$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
0	1400	1400	3
1	900	900	2
2	400	400	1
$\geq 3$	0	0	0

Voyons maintenant comment nous pouvons calculer les valeurs  $f_2^*(s_2)$  et  $x_2^*$ , lorsque  $s_2 = 0$ . Nous devons avoir  $x_2 \geq 3$  (car nous devons livrer au moins 3 unités du produit). D'autre part,

$$\begin{aligned} f_2(0, 3) &= p_2(0, 3) + f_3^*(0) = 1500 + 1400 = 2900, \\ f_2(0, 4) &= p_2(0, 4) + f_3^*(1) = 2150 + 900 = 3050, \\ f_2(0, 5) &= p_2(0, 5) + f_3^*(2) = 2800 + 400 = 3200, \\ f_2^*(0) &= \min\{f_2(0, 3), f_2(0, 4), f_2(0, 5)\} = f_2(0, 3). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $x_2^* = 3$ . Nous procédons de la même manière pour  $s_2 = 1, 2, 3$ .

$s_2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
0	-	-	-	2900	3050	3200	2900	3
1	-	-	2400	2450	2600	2850	2400	2
2	-	1900	1950	2000	2250	2900	1900	1
$\geq 3$	1400	1450	1500	1650	2300	2950	1400	0

Pour la première étape ( $n = 1$ ), nous avons  $s_1 = 2$  (il y a 2 unités au départ dans l'inventaire). Nous devons donc avoir  $x_1 \geq 1$ . De plus,

$$\begin{aligned} f_1(2, 1) &= p_1(2, 1) + f_2^*(0) = 300 + 2900 = 3200, \\ f_1(2, 2) &= p_1(2, 2) + f_2^*(1) = 650 + 2400 = 3050, \\ f_1(2, 3) &= p_1(2, 3) + f_2^*(2) = 1100 + 1900 = 3000, \\ f_1(2, 4) &= p_1(2, 4) + f_2^*(3) = 1550 + 1400 = 2950. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_1^*(2) = f_1(2, 4)$  et  $x_1^* = 4$ . Sous forme de tableau, cela donne:

$s_1$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
2	3200	3050	3000	2950	2950	4

La politique optimale est donc:

$$x_1^* = 4, x_2^* = 0, x_3^* = 3$$

donnant lieu à  $s_2 = 3, s_3 = 0$ . Le coût total est  $f_1^*(2) = 2950\$$ .

**Exemple 58** (Affectation de ressources). Trois équipes de recherche travaillent sur un même problème avec chacune une approche différente. La probabilité que l'équipe  $E_i$  échoue est  $P[E_1] = 0.4, P[E_2] = 0.6, P[E_3] = 0.8$ . Ainsi, la probabilité que les trois équipes échouent simultanément est:  $(0.4)(0.6)(0.8) = 0.192$ . Nous voulons ajouter deux autres scientifiques afin de minimiser la probabilité d'échec. À quelles équipes faut-il affecter ces deux scientifiques afin de minimiser la probabilité d'échec? La Table 58 représente les probabilités d'échec pour chaque équipe en fonction du nombre de scientifiques ajoutés.

Scientifiques ajoutés	$E_1$	$E_2$	$E_3$
0	0.4	0.6	0.8
1	0.2	0.4	0.5
2	0.15	0.2	0.3

TABLE 7.2 – Affectation de ressources.

Nous faisons correspondre l'équipe  $n$  à l'étape  $n$ , pour  $n = 1, 2, 3$  ( $N = 3$ ). L'état  $s_n$  est le nombre de scientifiques non encore affectés. La décision  $x_n$  correspond au nombre de scientifiques affectés à l'équipe  $E_n$ . Soit  $p_n(x_n)$  la probabilité d'échec de l'équipe  $E_n$  si  $x_n$  scientifiques lui sont affectés. Alors,

$$\begin{aligned} f_n(s_n, x_n) &= p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n) \\ f_n^*(s_n) &= \min\{f_n(s_n, x_n) \mid x_n = 0, 1, \dots, s_n\}, \end{aligned}$$

avec  $f_4^*(0) = 1$ . Calculons d'abord  $f_3^*(s_3)$  et  $x_3^*$ . Nous devons avoir  $s_3 = x_3$  (nous affectons tous les scientifiques non encore affectés), de sorte que nous avons le tableau

$s_3$	$f_3(s_3, s_3)$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
0	0.8	0.8	0
1	0.5	0.5	1
2	0.3	0.3	2

Pour calculer les valeurs  $f_2^*(s_2)$  et  $x_2^*$ , lorsque  $s_2 = 1$ , observons d'abord que nous devons avoir  $x_2 \leq 1$ . Nous avons

$$\begin{aligned} f_2(1, 0) &= p_2(1, 0) \times f_3^*(1) = 0.6 \times 0.5 = 0.3, \\ f_2(1, 1) &= p_2(1, 1) \times f_3^*(0) = 0.4 \times 0.8 = 0.32, \\ f_2^*(1) &= \min\{f_2(1, 0), f_2(1, 1)\} = f_2(1, 0). \end{aligned}$$

Dès lors,  $x_2^* = 0$ . Nous pouvons procéder de même pour  $s_2 = 0$  et 2. Ceci donne le tableau ci-dessous.

$s_2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
0	0.48	-	-	0.48	0
1	0.3	0.32	-	0.3	0
2	0.18	0.2	0.16	0.16	2

Pour la dernière étape ( $n = 1$ ), nous avons  $s_1 = 2$  (il y a 2 scientifiques à affecter). Nous avons

$$\begin{aligned} f_1(2, 0) &= p_1(2, 0) \cdot f_2^*(2) = 0.4 \times 0.16 = 0.064, \\ f_1(2, 1) &= p_1(2, 1) \cdot f_2^*(1) = 0.2 \times 0.3 = 0.06, \\ f_1(2, 2) &= p_1(2, 2) \cdot f_2^*(0) = 0.15 \times 0.48 = 0.072. \end{aligned}$$

Aussi,  $f_1^*(2) = f_1(2, 1)$  et  $x_1^* = 1$ .

$s_1$	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
0	0.064	0.06	0.072	0.06	1

La politique optimale est donc:  $x_1^* = 1$  (d'où  $s_2 = 1$ ),  $x_2^* = 0$  (d'où  $s_3 = 1$ ),  $x_3^* = 1$ . La probabilité d'échec est:  $f_1^*(1) = 0.06$ .

## 7.2 Affectation de ressources

La programmation dynamique est souvent utilisée pour résoudre des problèmes d'affectation de ressources. C'était le cas dans notre dernier exemple, où il y avait une ressource à affecter (les scientifiques). Que faire lorsqu'il y a plus d'une ressource? Dans ce cas, chaque état est un vecteur dont chaque coordonnée  $i$  représente la quantité de la ressource  $i$  non encore affectée.

**Exemple 59** (problème Wyndor Glass). Nous considérons deux types de produits (produit 1, produit 2) et trois usines (usine 1, usine 2, usine 3). La ressource  $i$  est la capacité de production pour l'usine  $i$ , exprimée en heures par semaine. Nous connaissons le profit par lot (20 unités) de chaque produit, et chaque lot du produit 1 (2) est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3 (2 et 3). Nous souhaitons déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots par semaine) de façon à maximiser le profit total. Les données sont reproduites dans la Table 59. L'étape  $n$  sera le produit  $n$ ,  $n = 1, 2$  ( $N = 2$ ). Nous avons comme état  $s_n$  ( $R_1, R_2, R_3$ ) $_n$ , où  $R_i$

	Produit 1 (temps de production, h/lot)	Produit 2 (temps de production, h/lot)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit(\$)/lot	3000	5000	

TABLE 7.3 – Allocation de ressources pour le problème Wyndor Glass

est la quantité de la ressource  $i$  (temps de production à l'usine  $i$ ) non encore affectée. La décision  $x_n$  est le nombre

de lots du produit  $n$ , et

$$\begin{aligned} f_n(s_n, x_n) &= c_n x_n + f_{n+1}^*(s_{n+1}) \quad (f_3^*(s_3) = 0), \\ f_2^*(s_2) &= \max\{5x_2 \mid 2x_2 \leq 12, 2x_2 \leq 18 - 3x_1, x_2 \geq 0\} \\ f_1^*(s_1) &= \max\{3x_1 + f_2^*(s_2) \mid x_1 \leq 4, 3x_1 \leq 18, x_1 \geq 0\} \end{aligned}$$

De plus,

$$s_1 = (4, 12, 18), \quad s_2 = (4 - x_1, 12, 18 - 3x_1).$$

Afin de résoudre le problème, nous cherchons d'abord  $f_2^*(s_2)$  et  $x_2^*$ . Nous avons

$$f_2^*(s_2) = \max\{5x_2 \mid 2x_2 \leq 12, 2x_2 \leq 18 - 3x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Les contraintes

$$2x_2 \leq 12 \quad \text{et} \quad 2x_2 \leq 18 - 3x_1$$

impliquent

$$x_2 \leq \min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}.$$

Par conséquent

$$f_2^*(s_2) = \max \left\{ 5x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq \min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} \right\},$$

et

$$x_2^* = \min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}. \quad (7.2.1)$$

Nous avons donc

$$f_2^*(s_2) = 5 \min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \mid 3x_1 \leq 18 \right\}.$$

Calculons maintenant  $f_1^*(s_1)$  et  $x_1^*$ . Nous avons

$$f_1^*(s_1) = \max\{3x_1 + f_2^*(s_2) \mid x_1 \leq 4, 3x_1 \leq 18, x_1 \geq 0\}.$$

Or,

$$x_1 \leq 4$$

implique

$$3x_1 \leq 18.$$

Ainsi

$$f_1^*(s_1) = \max \left\{ 3x_1 + 5 \min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} \mid 0 \leq x_1 \leq 4 \right\}.$$

Or,

$$\min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = \begin{cases} 6 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 2, \\ \frac{18 - 3x_1}{2} & \text{si } 2 \leq x_1 \leq 4. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$f_1^*(s_1) = \max\{f_1(s_1, x_1) \mid 0 \leq x_1 \leq 4\},$$

avec

$$f_1(s_1, x_1) = \begin{cases} 3x_1 + 30 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 45 - \frac{9}{2}x_1 & \text{si } 2 \leq x_1 \leq 4. \end{cases}$$

Le maximum est atteint en  $x_1^* = 2$  et  $f_1^*(s_1) = 36$ .

Comme, de (7.2.1),

$$x_2^* = \min \left\{ 6, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\},$$

et  $x_1^* = 2$ , nous avons  $x_2^* = 6$ . La politique optimale est donc:  $x_1^* = 2$ ,  $x_2^* = 6$  de valeur  $f_1^*(s_1) = 36$ .

En utilisant la même approche, il est possible de résoudre par la programmation dynamique des modèles où

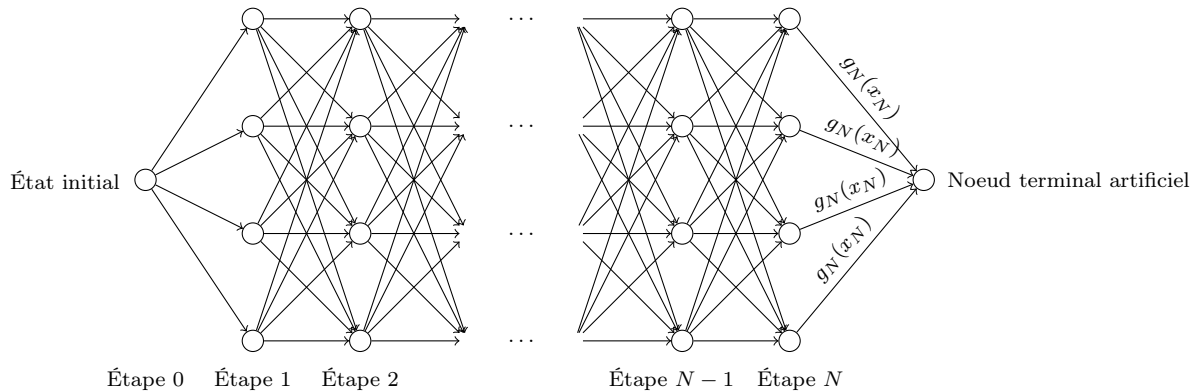
- l'objectif ou les contraintes sont non linéaires;
- certaines variables sont entières.

### 7.3 Programmation dynamique déterministe et plus court chemin

Supposons que pour  $s_1$  fixé, nous voulions résoudre

$$\min_{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}} g_N(x_N) + \sum_{k=1}^{N-1} g_k(s_k, x_k).$$

Nous pouvons calculer les *décisions optimales*  $x_1, \dots, x_N$  dès le départ, car aucune nouvelle information n'est obtenue en cours de route. Si les ensembles d'états et de décisions sont finis à chaque étape, résoudre ce problème équivaut à trouver un *plus court chemin dans un réseau*, où les *noeuds* sont tous les *états*  $(k, s_k)$  possibles, pour  $1 \leq k \leq N$ , auxquels nous ajoutons un noeud artificiel  $t$  qui correspond à l'état où tout est terminé (étape  $N + 1$ ). Pour chaque noeud  $(k, s_k)$ ,  $k < N$ , et chaque décision  $x_k$ , nous introduisons un arc de longueur  $g(s_k, x_k)$  partant du noeud  $(k, s_k)$  et allant au noeud  $(k + 1, s_{k+1})$ , avec  $s_{k+1} = g_k(s_k, x_k)$ . Chaque noeud  $(N, s_N)$  est relié au noeud  $t$  par un arc de longueur  $g_N(x_N)$ . Nous cherchons alors un plus court chemin de  $(0, s_0)$  à  $t$ .



Si on numérote les noeuds couche par couche, par ordre croissant de valeur de  $k$ , on obtient un *réseau sans cycle et ordonné topologiquement* (i.e., un arc  $(i, j)$  ne peut exister que si  $i < j$ ). Dans le cas où il n'est pas nécessaire de mémoriser le numéro d'étape, on peut simplifier le réseau en agrégeant des noeuds. Le réseau résultant peut ne plus être ordonné topologiquement. Inversement, tout problème de recherche d'un plus court chemin dans un réseau peut se formuler comme un problème de programmation dynamique déterministe (avec des coûts additifs entre étapes).

### 7.4 Cas probabiliste

Dans la programmation dynamique probabiliste, la décision optimale à l'étape  $n$  dépend de la loi de probabilité de l'état à l'étape  $n + 1$ . Ainsi, nous passerons de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ , se retrouvant ainsi dans l'état  $i$ , avec une probabilité  $p_i$ . Étant donné  $S$  états à l'étape  $n + 1$ , nous aurons  $p_i \geq 0$  et

$$\sum_{i=1}^S p_i = 1.$$

La relation de récurrence dépend de cette loi de probabilité et de l'objectif à optimiser.

**Exemple 60** (Jeu de hasard). *Le jeu consiste à miser un nombre quelconque de jetons. Si nous gagnons, nous remportons le nombre de jetons misés. Si nous perdons, nous perdons le nombre de jetons misés. Un statisticien croit pouvoir gagner chaque jeu avec une probabilité égale à  $2/3$ . Ses collègues parient avec lui qu'en misant au départ 3 jetons, il aura moins de 5 jetons après 3 parties. Combien de jetons miser à chacune des 3 parties ?*

*Le modèle peut se formuler comme suit: l'étape  $n$  correspond à la partie  $n$ ,  $n = 1, 2, 3$  ( $N = 3$ ). L'état  $s_n$  est le nombre de jetons au début de la partie  $n$ , et la décision  $x_n$  correspond au nombre de jetons à parier à la partie  $n$ . Nous souhaitons maximiser la probabilité d'avoir au moins 5 jetons après 3 parties. Soit  $f_n(s_n, x_n)$  la probabilité*

de terminer avec au moins 5 jetons, étant donné que nous sommes dans l'état  $s_n$  à l'étape  $n$ , que nous misons  $x_n$  jetons et que nous effectuons des décisions optimales aux étapes  $n + 1, \dots, N$ . Nous avons

$$f_n^*(s_n) = \max\{f_n(s_n, x_n) \mid x_n = 0, 1, \dots, s_n\}.$$

étant donné que nous dans l'état  $s_n$  à l'étape  $n$  et que nous misons  $x_n$  jetons, nous pouvons:

- perdre et se retrouver dans l'état  $s_n - x_n$  avec une probabilité  $1/3$ ;
- gagner et se retrouver à l'état  $s_n + x_n$  avec une probabilité  $2/3$ .

Nous avons la fonction de récurrence

$$f_n(s_n, x_n) = \frac{1}{3}f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3}f_{n+1}^*(s_n + x_n).$$

De plus,

$$f_4^*(s_4) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_4 < 5, \\ 1 & \text{si } s_4 \geq 5. \end{cases}$$

Calculons d'abord  $f_3^*(s_3)$  et  $x_3^*$ . Nous avons le tableau

$s_3$	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	0	-	-	-	0	$\geq 0$
2	0	0	0	-	-	0	$\geq 0$
3	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-	$\frac{2}{3}$	$\geq 2$
4	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\geq 1$
$\geq 5$	1					1	0

Voyons maintenant comment nous pouvons calculer les valeurs  $f_2^*(s_2)$  et  $x_2^*$ , lorsque  $s_2 = 3$ . Il est clair que nous devons avoir  $x_2 \leq 3$ . De plus,

$$\begin{aligned} f_2(3, 0) &= \frac{1}{3}f_3^*(3) + \frac{2}{3}f_3^*(3) = \frac{2}{3}; \\ f_2(3, 1) &= \frac{1}{3}f_3^*(2) + \frac{2}{3}f_3^*(4) = \frac{4}{9}; \\ f_2(3, 2) &= \frac{1}{3}f_3^*(1) + \frac{2}{3}f_3^*(5) = \frac{2}{3}; \\ f_2(3, 3) &= \frac{1}{3}f_3^*(0) + \frac{2}{3}f_3^*(6) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_2^*(3) = \max\{f_2(3, 0), f_2(3, 1), f_2(3, 2), f_2(3, 3)\} = f_2(3, 0).$$

Dès lors,  $x_2^* = 0, 2$  ou  $3$ . De la même façon, pour  $s_2$ , nous avons le tableau,

$s_2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	0	-	-	-	0	$\geq 0$
2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	-	-	$\frac{4}{9}$	1, 2
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-	$\frac{2}{3}$	0, 2, 3
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\geq 1$
$\geq 5$	1					1	0

Pour la première étape ( $n = 1$ ), nous avons  $s_1 = 3$ , comme nous pouvons affecter 3 jetons au départ du jeu. Ceci donne le tableau

$s_1$	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	1

Dès lors

$$\begin{aligned} f_1(3, 0) &= \frac{1}{3}f_2^*(3) + \frac{2}{3}f_2^*(3) = \frac{2}{3}, \\ f_1(3, 1) &= \frac{1}{3}f_2^*(2) + \frac{2}{3}f_2^*(4) = \frac{20}{27}, \\ f_1(3, 2) &= \frac{1}{3}f_2^*(1) + \frac{2}{3}f_2^*(5) = \frac{2}{3}, \\ f_1(3, 3) &= \frac{1}{3}f_2^*(0) + \frac{2}{3}f_2^*(6) = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$f_1^*(3) = \max\{f_1(3, 0), f_1(3, 1), f_1(3, 2), f_1(3, 3)\} = f_1(3, 1).$$

Nous en déduisons

$$x_1^* = 1.$$

La politique optimale est donc :

- $x_1^* = 1$ ;
- Si nous gagnons ( $s_2 = 4$ ),  $x_2^* = 1$ .
  - Si nous gagnons ( $s_3 = 5$ ),  $x_3^* = 0$ .
  - Si nous perdons ( $s_3 = 3$ ),  $x_3^* = 2$  ou 3.
- Si nous perdons ( $s_2 = 2$ ),  $x_2^* = 1$  ou 2.
  - Si nous gagnons ( $s_3 = 3$  ou 4),  $x_3^* = 2$  ou 3 (si  $x_2^* = 1$ ) ou  $1 \leq x_3^* \leq 4$  (si  $x_2^* = 2$ ).
  - Si nous perdons ( $s_3 = 1$  ou 0),  $x_3^* \geq 0$  (mais le pari est perdu!).

## 7.5 Notes

Ce chapitre se base essentiellement sur les notes de cours de Bernard Gendron, 2007. Le lien avec les plus courts chemins est développé notamment dans [1].



# 8

## Simulation

### 8.1 Introduction

Simuler un système stochastique consiste à imiter son comportement pour estimer sa performance. Un modèle de simulation est une représentation du système stochastique permettant de générer un grand nombre d'événements aléatoires et d'en tirer des observations statistiques.

**Exemple 61** (Jeu de hasard). *Chaque partie consiste à tirer une pièce de monnaie jusqu'à ce que la différence entre le nombre de faces et le nombre de piles soit égale à 3. Chaque tirage coûte 1\$, et chaque partie jouée rapporte 8\$ au joueur. Nous aurons par exemple les jeux*

- *FFF: gain de  $8\$ - 3\$ = 5\$$ ;*
- *PFPPP: gain de  $8\$ - 5\$ = 3\$$ ;*
- *PPFFFPFPPPP: perte de  $8\$ - 11\$ = 3\$$ .*

*Nous nous demandons par conséquent s'il est intéressant de jouer. Pour répondre à cette question, nous allons simuler le jeu. Il y a deux façons de le faire:*

- *nous pouvons jouer pendant un certain temps sans miser d'argent;*
- *nous pouvons simuler le jeu par ordinateur.*

*Néanmoins, simuler une seule partie ne nous aide pas à prendre une décision. Pour cela, il faudrait voir ce qui se passe sur un grand nombre de parties et mesurer le gain moyen (ou la perte moyenne).*

*Dans cet exemple, nous pouvons définir les éléments d'un modèle de simulation comme suit*

**système stochastique** : *tirages successifs;*

**horloge** : *nombre de tirages;*

**définition de l'état du système** :  $N(t)$ , *le nombre de faces moins le nombre de piles après  $t$  tirages;*

**événements modifiant l'état du système** : *tirage de pile ou de face;*

**méthode de génération d'événements** : *génération d'un nombre aléatoire uniforme;*

**formule de changement d'état** :  $N(t+1) = N(t) + 1$ , *si  $F$  est tirée;  $N(t) - 1$ , si  $P$  est tirée;*

**performance** :  $8 - t$ , *lorsque  $N(t)$  atteint  $+3$  ou  $-3$ .*

### 8.2 Files d'attente

#### 8.2.1 Concepts de base

Un système de file d'attente consiste d'un ou de plusieurs serveurs qui fournissent un service d'une certaine nature à des clients qui se présentent, et qui sont issus d'une population donnée. Les clients qui arrivent et trouvent

tous les serveurs occupés rejoindront (généralement) une ou plusieurs files (ou lignes) devant les serveurs, d'où la qualification de file d'attente. . Quelques exemples de files d'attente sont repris dans la Table 8.1. Le système de file

ystème	Serveurs	Clients
Banque	Guichets	Clients
Hôpital	Docteurs, infirmières, lits	Patients
Système informatique	Unités centrales, dispositifs I/O	Travaux
Manufacture	Machines, travailleurs	Composants
Centre d'appel	Serveurs	Appels entrants

TABLE 8.1 – Exemples de files d'attente

d'attente est caractérisé par trois composants:

1. le processus d'arrivée ;
2. le mécanisme de service ;
3. la discipline de file.

Spécifier le processus d'arrivée pour un système de file d'attente revient à décrire comment les clients arrivent dans le système. Soit  $A_i$  le temps d'inter-arrivées entre les arrivées des  $(i - 1)^e$  et  $i^e$  clients. Si  $A_1, A_2, \dots$ , sont supposés être des variables i.i.d., nous dénoterons le temps d'interarrivée moyen (ou espéré) par  $E[A]$  et appellerons  $\lambda = 1/E[A]$  le taux d'arrivée des clients.

Le mécanisme de service pour un système de file d'attente est articulé en spécifiant le nombre de serveurs (dénnoté par  $s$ ), où chaque serveur a sa propre file ou au contraire une seule file alimente tous les serveurs, et la distribution de probabilité des temps de service des clients. Soit  $S_i$  le temps de service du  $i^e$  client. Si  $S_1, S_2, \dots$ , sont des variables aléatoires i.i.d., nous dénoterons le temps de service moyen d'un client par  $E[S]$  et appelleront  $\omega = 1/E[S]$  le taux de service d'un serveur.

Nous parlerons de situation transitoire lorsque l'état du système dépend grandement de la situation initiale et du temps écoulé, et de situation d'équilibre lorsque l'état du système peut être considéré indépendant de la situation initiale et du temps écoulé. En situation d'équilibre, nous avons la formule de Little:

$$L = \lambda W,$$

où  $L$  est le nombre moyen de clients dans le système,  $\lambda$ , le taux moyen d'arrivée des nouveaux clients, et  $W$  le temps moyen dans le système.

### 8.2.2 Modèle $M/M/1$

Il s'agit du modèle de file d'attente le plus courant, avec les caractéristiques suivantes:

- file d'attente: nombre infini de clients ;
- stratégie de service: premier arrivé, premier servi (FIFO) ;
- un seul serveur ;
- les taux d'arrivée et de service obéissent à des lois de Poisson. De manière équivalente, le temps entre l'arrivée de deux clients successifs et le temps de service obéissent à des lois exponentielles: on parle de processus Markoviens.

La notation générale pour les modèles de file d'attente est  $X/Y/s$ , où  $X$  représente la loi du temps d'interarrivée,  $Y$  est la loi du temps de service, et  $s$  donne le nombre de serveurs.

**Exemple 62** (File d'attente  $M/M/1$ ). *En situation d'équilibre, plusieurs résultats analytiques (obtenus par analyse du modèle mathématique) existent. Soit  $\lambda$  le taux moyen d'arrivée et  $\mu$  le taux moyen de service. Supposons que  $\lambda < \mu$  Le nombre moyen de clients dans le système vaut*

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Le temps moyen d'attente dans le système vaut quant à lui

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Il est aisé de vérifier ces résultats par simulation. Dans le cas présent, les éléments de la simulation sont:

**système stochastique** : file d'attente  $M/M/1$ ;

**horloge** : temps écoulé;

**définition de l'état du système** :  $N(t)$ , le nombre de clients dans le système au temps  $t$ ;

**événements modifiant l'état du système** : arrivée ou fin de service d'un client;

**formule de changement d'état** :  $N(t+1) = N(t) + 1$ , si arrivée;  $N(t) - 1$ , si fin de service.

Nous allons voir deux méthodes pour étudier l'évolution du système dans le temps:

- par intervalles de temps fixe;
- par génération d'événement.

Nous supposons que les valeurs des paramètres de notre système sont  $\lambda = 3$  clients par heure, et  $\mu = 5$  clients par heure.

Dans le cas d'intervalles de temps fixe, l'idée est

1. faire écouler le temps d'un petit intervalle  $\Delta t$ ;
2. mettre à jour le système en déterminant les événements qui ont pu se produire durant l'intervalle  $\Delta t$ , et recueillir l'information sur la performance du système;
3. retourner en 1.

Ici, les événements sont soit des arrivées, soit des départs (fins de service). Si  $\Delta t$  est suffisamment petit, nous pouvons considérer qu'il ne se produira qu'un seul événement (arrivée ou départ) durant cet intervalle de temps.

Prenons  $\Delta t$  égal à 0.1 heure (6 minutes). La probabilité qu'il y ait une arrivée durant cet intervalle de temps vaut:

$$P_A = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - e^{-3/10} \approx 0.259.$$

La probabilité qu'il y ait un départ durant cet intervalle de temps est:

$$P_D = 1 - e^{-\mu \Delta t} = 1 - e^{-5/10} \approx 0.393.$$

Pour générer un événement, nous pouvons simplement tirer deux nombres aléatoires selon une loi  $U[0,1]$ . Si le premier nombre est strictement plus petit que 0.259, nous aurons une arrivée. Si le deuxième nombre est strictement inférieur à 0.393, nous considérerons un départ (si un client était en cours de service). Ceci pourrait par exemple donner les chiffres de la Table 8.2.

D'après cet exemple, il est possible d'estimer les performances du système. Que se passe-t-il si nous voulons mesurer  $W$ , le temps moyen passé dans le système? Nous avons deux clients qui sont entrés dans le système et chacun y est resté 18 minutes ou 0.3 heures, aussi peut-on estimer  $W$  par 0.3. Pourtant, la vraie valeur est  $W = 1/(\mu - \lambda) = 0.5$ . Il faudrait un échantillon beaucoup plus grand, et ce d'autant plus que nous devrions simuler le système en état d'équilibre.

La génération d'événement peut se résumer comme suit:

1. faire écouler le temps jusqu'au prochain événement;
2. mettre à jour le système en fonction de l'événement qui vient de se produire et générer aléatoirement le temps jusqu'au prochain événement; recueillir l'information sur la performance du système;
3. retourner à 1.

Nous pourrions ainsi obtenir la suite d'événements reprise dans la Table 8.3.

Si nous considérons une simulation comportant l'arrivée de 10000 clients, les résultats montrent que:

- le nombre moyen de clients dans le système est  $L \approx 1.5$ ;
- le temps moyen dans le système est  $W \approx 0.5$ .

Remarque: des résultats analytiques existent pour des modèles simples (comme  $M/M/1$ ), mais pas pour des files d'attente plus complexes.

$t$ (min)	$N(t)$	Nombre 1	Arrivée	Nombre 2	Départ
0	0				
6	1	0.096	Oui	-	
12	1	0.569	Non	0.665	Non
18	1	0.764	Non	0.842	Non
24	1	0.492	Non	0.224	Oui
30	0	0.950	Non	-	
36	0	0.610	Non	-	
42	1	0.145	Oui	-	
48	1	0.484	Non	0.552	Non
54	1	0.350	Non	0.590	Non
60	0	0.430	Non	0.041	Oui

TABLE 8.2 – Simulation par intervalles de temps fixe.

$t$ (min)	$N(T)$	Temps d'interarrivée	Temps de service	Prochaine arrivée	Prochain départ	Prochain événement
0	0	2.019	-	2.019	-	Arrivée
2.019	1	16.833	13.123	18.852	15.142	Départ
15.142	0	-	-	18.852	-	Arrivée
18.852	1	28.878	22.142	47.730	40.994	Départ
40.994	0	-	-	47.730	-	Arrivée
47.730	1					

TABLE 8.3 – Simulation par événements.

### 8.3 Simulation à événements discrets

L'approche s'est imposée dans nombre de problèmes de simulations. Le principe général est résumé dans l'ordonnogramme de la Figure 8.1.

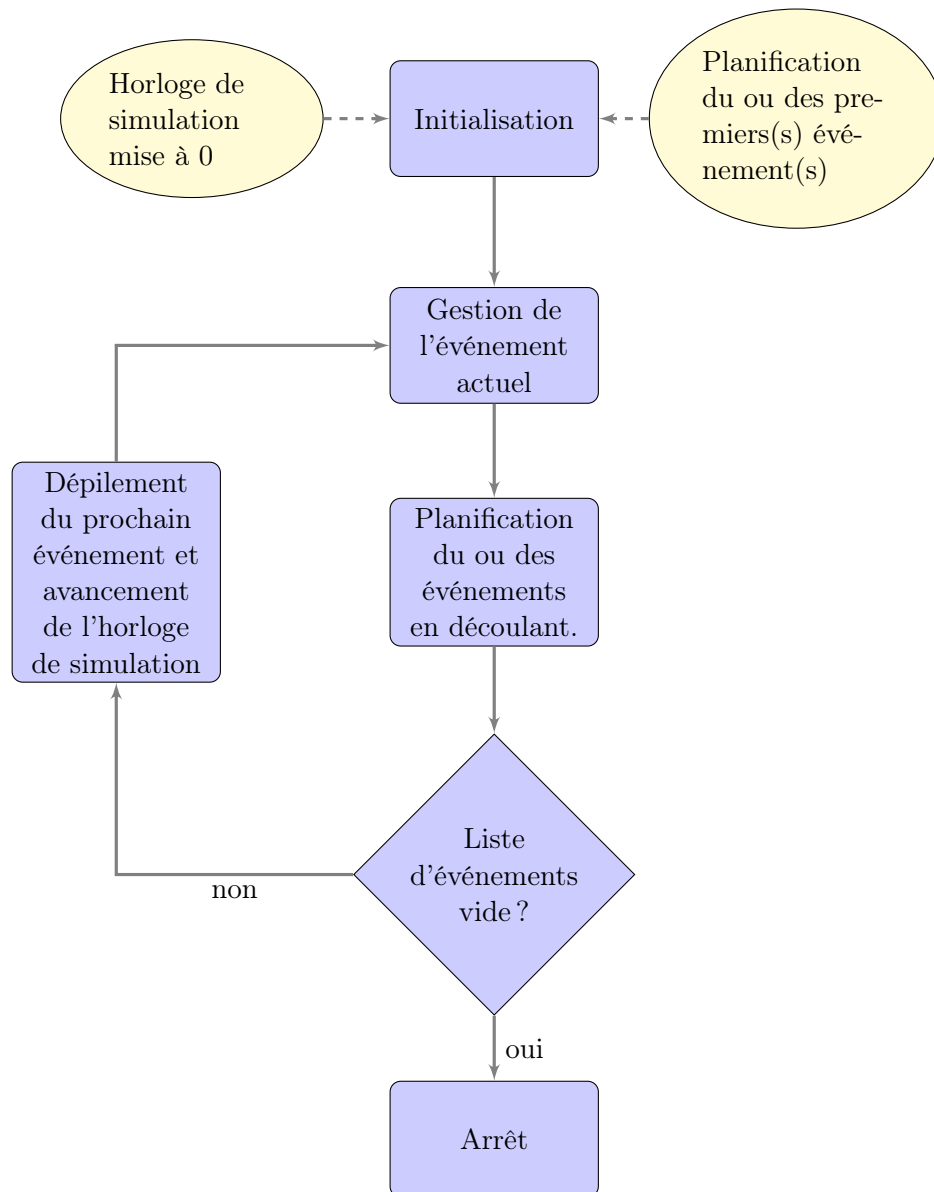


FIGURE 8.1 – Schéma d'une simulation à événements discrets.

### 8.4 Notes

Ce chapitre se base essentiellement sur les notes de cours de Bernard Gendron, 2007. Pour plus de détails sur la simulation à événements discrets, nous renvoyons le lecteur aux notes du cours IFT3245, du même auteur: .



## 8.5 Logiciels d'optimisation

### 8.5.1 IOR Tutorial

Le logiciel IOR Tutorial, qui accompagne le livre *Introduction to Operational Research* [2] est disponible gratuitement à l'adresse [http://highered.mcgraw-hill.com/sites/0073017795/student\\_view0/ior\\_tutorial.html](http://highered.mcgraw-hill.com/sites/0073017795/student_view0/ior_tutorial.html). Le logiciel est fourni sous la forme d'un exécutable sous l'environnement Microsoft Windows, et comme archive Java pour les autres plate-formes. Il est par conséquent utilisable sur la majorité des systèmes actuels. Le logiciel est intéressant pour rapidement tester des programmes d'optimisation simples, mais ne peut être considéré comme un solveur à part entière. Son interface graphique le rend néanmoins adapté pour une expérimentation rapide avec les exemples introduits dans le cours.

### 8.5.2 GAMS

GAMS est l'acronyme de **G**eneralized **A**lgebraic **M**odeling **S**ystem. Il s'agit avant tout d'un langage servant à la formulation et à la résolution de modèle de programmation mathématique. En pratique, il s'agit d'un paquetage intégré qui permet de

- spécifier la structure du modèle d'optimisation ;
- spécifier et calculer les données qui entrent dans le modèle ;
- résoudre ce modèle ;
- produire un rapport sur un modèle ;
- conduire une analyse comparative.

GAMS peut être téléchargé à l'adresse <http://www.gams.com>. La licence de GAMS et des solveurs académique est passablement élevée, toutefois il est utilisable de manière gratuite en version de démonstration, ce qui permettra d'illustrer certains concepts de base du cours.

Sous des environnements de type UNIX (incluant Mac OS X et la majorité des distributions Linux), GAMS s'utilise uniquement en ligne de commande. Sous Microsoft Windows, il dispose d'une interface graphique.

### Formulation d'un problème simple

**Exemple 63.** *Considérons le problème d'optimisation linéaire*

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 109x_1 + 90x_2 + 115x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 100; \\ & 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 500; \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Le fichier GAMS décrivant ce problème est constitué des parties suivantes:

1. spécification des variables ;
2. spécification des équations:
  - déclaration ;
  - spécification de la structure algébrique ;
3. définition du modèle ;

#### 4. définition de la méthode de résolution.

Ce problème peut être formulé sous GAMS comme suit:

```
VARIABLES
  Z           Variable Z;

POSITIVE VARIABLES
  X1          Variable X1
  X2          Variable X2
  X3          Variable X3;

EQUATIONS
  Equation1   Equation 1
  Equation2   Equation 2
  Equation3   Equation 3;

Equation1..
  Z =E= 109*X1 + 90*X2 + 115*X3;

Equation2..
  X1 + X2 + X3 =L= 100;

Equation3..
  6*X1 + 4*X2 + 8*X3 =L= 500;

MODEL Example1 /ALL/;

SOLVE Example1 USING LP MAXIMIZING Z;
```

Remarquons d'ores et déjà que chaque instruction se termine par un point-virgule. Leur omission produit une erreur de compilation. Détaillons les instructions.

### Spécification des variables

GAMS exige que les variables soient identifiées. Dans l'exemple précédent, nous avons les variables Z, X1, X2, X3:

```
VARIABLES
  Z           Variable Z;

POSITIVE VARIABLES
  X1          Variable X1 (Optional Text)
  X2          Variable X2
  X3          Variable X3;
```

Pour tout modèle construit avec GAMS, il convient d'identifier l'objectif à l'aide d'une variable, ici Z. Autrement dit,

$$\max_x c^T x$$

devient

$$\begin{aligned} & \max z \\ & \text{s.c. } z = c^T x, \\ & \quad Z = CX. \end{aligned}$$



Les noms de variables peuvent avoir jusqu'à 31 caractères. Il est également possible de spécifier plus précisément le type des variables:

VARIABLE	variables non restreintes
POSITIVE VARIABLE	variables non négatives
NEGATIVE VARIABLE	variables non positives
BINARY VARIABLE	variables binaires (dans $\{0, 1\}$ )
INTEGER VARIABLE	variables entières (naturelles)

### Dénomination des équations

La spécification d'une équation consiste en deux parties. Il convient tout d'abord de déclarer ces équations: GAMS exige du modélisateur de nommer chaque équation à l'oeuvre dans le modèle. Dans l'exemple, les équations sont déclarées après le mot-clé **EQUATIONS**

```
EQUATIONS
  Equation1      Equation 1
  Equation2      Equation 2
  Equation3      Equation 3;
```

Comme pour les variables, le nom d'une équation peut prendre jusqu'à 31 caractères. A droite du nom de l'équation figure un (bref) texte d'explications.

Il nous faut de plus spécifier la structure algébrique: après avoir nommé les équations, la structure algébrique exacte doit être spécifiée en utilisant la notation `..`:

```
Equation1..
  Z =E= 109*X1 + 90*X2 + 115*X3;

Equation2..
  X1 + X2 + X3 =L= 100;

Equation3..
  6*X1 + 4*X2 + 8*X3 =L= 500;
```

La forme algébrique exige l'utilisation d'une syntaxe spéciale afin de définir la forme exacte de l'équation:

```
=E=  contrainte d'égalité
=L=  inférieur ou égal
=G=  supérieur ou égal
```

### Spécification du modèle

Le mot-clé **MODEL** est utilisé pour identifier les modèles à résoudre. Il convient de

1. donner un nom au modèle (par exemple `Example1`);
2. spécifier les équations à inclure, entre des barres italiques `/ /`.

Ceci donne pour notre exemple

```
MODEL Example1 /ALL/;
```

Nous pourrions aussi avoir

```
MODEL Example1 /Equation1, Equation2/;
```

## Spécification du solveur

Le mot-clé SOLVE indique à GAMS d'appliquer un solveur au modèle nommé, en utilisant les données définies juste avant l'instruction SOLVE. Ainsi, dans notre exemple, nous avons:

```
SOLVE Example1 USING LP MAXIMIZING Z;
```

Si nous avons affaire à un problème linéaire de minimisation, nous pourrions écrire

```
SOLVE Example1 USING LP MINIMIZING Z;
```

En place de LP, nous devrions écrire MIP pour traiter un problème de programmation entière mixte:

```
SOLVE Example1 USING MIP MAXIMIZING Z;
```

De même, nous spécifierons un problème non-linéaire avec le mot-clé NLP:

```
SOLVE Example1 USING NLP MAXIMIZING Z;
```

## Rapport de solution

A la fin de l'exécution, GAMS produit un rapport indiquant la solution trouvée, la valeur de la fonction objectif en cette solution, ainsi que différentes informations permettant d'analyser le comportement de l'algorithme d'optimisation, et diverses propriétés du problème en cours d'étude. En particulier, le résumé de rapport donne le nombre total de cas non optimaux, non réalisables et non bornés rencontrés.

```
**** REPORT SUMMARY :           0      NONOPT
                                0      INFEASIBLE
                                0      UNBOUNDED
```

L'information sur les solutions peut être affichée de différentes manières:

1. sortie standard de GAMS;
2. utilisation des commandes DISPLAY;
3. rapports additionnels sur base des valeurs des solutions.

La sortie standard de GAMS présente la solution sous forme d'un tableau, qui dans le cas de l'exemple est:

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- EQU Equation1	.	.	.	1.000
---- EQU Equation2	-INF	100.000	100.000	52.000
---- EQU Equation3	-INF	500.000	500.000	9.500

```
Equation1 Equation 1
Equation2 Equation 2
Equation3 Equation 3
```

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR Z	-INF	9950.000	+INF	.
---- VAR X1	.	50.000	+INF	.
---- VAR X2	.	50.000	+INF	.
---- VAR X3	.	.	+INF	-13.000

Le point simple "." représente un zéro, tandis que INF représente l'infini.

## Sommations

La notation mathématique  $\sum_j x_j$  se traduira par

```
SUM(j,x(j))
```

En d'autres termes, nous avons la syntaxe

```
SUM( index of summation, names(index))
```

Il est possible d'imbriquer les sommations. Ainsi,  $\sum_j \sum_i x_{ji}$  donnera

```
SUM(j,SUM(i,x(j,i)))
```

ou encore

```
SUM((j,i),x(j,i))
```

## Définition d'ensemble

Spécifier les variables une à une est vite fastidieux, pour ne pas dire irréaliste (par exemple si nous avons un million de variables), c'est pourquoi en modélisation algébrique, nous utilisons des indices. GAMS met à disposition le mot clé **SET** pour définir des ensembles, parcouru par un indice spécifié juste avant:

```
SET  ItemName  optional explanatory text for item
    / element1  optional explanatory text for element,
      element2  optional explanatory text for element /
```

Par exemple,

```
SET  i  index /1*10/
```

définit l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 10\}$ , qui peut être parcouru avec l'indice  $i$ . Il est possible d'associer un autre indice au même ensemble au moyen de la commande **ALIAS**, par exemple

**Exemple 64.** *ALIAS (i,j);*

permet d'utiliser  $j$  au lieu de  $i$ . Cette commande est utile par exemple pour traduire une contrainte de la forme

$$x_{ij} + x_{ji} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$j$  et  $i$  doivent indiquer le même ensemble, mais écrire

```
SET  i  / 1*10 /
      j  / 1*10 /
```

mènerait GAMS à considérer  $i$  et  $j$  comme indexant deux ensembles.

## Entrée de données

Les données sont entrées au moyen de quatre différents types de commandes GAMS:

**SCALAR** , pour les éléments ne dépendant pas d'ensembles ;

**PARAMETERS** , pour les éléments qui sont des vecteurs ;

**TABLES** , pour des éléments de deux dimensions ou plus ;

**PARAMETERS** , en affectation directe.

La manière la plus simple d'entrée des données est l'emploi de la commande **SCALAR**, qui prend la syntaxe suivante dans le format basique:

```
SCALAR ItemName optional text / value /;
```

Dans le cas de vecteurs, nous utiliserons la syntaxe

```
PARAMETER ItemName(Set) optional text;
  / element1 value,
  element2 value /;
```

Pour les entrées multidimensionnelles, nous aurons

```
TABLE ItemName(set1dep,set2dep) optional text
      set2elem1 set2elem2
set1element1 value11 value12
set1element2 value12 value22 ;
```

Plutôt que d'utiliser des constantes, nous pouvons affecter les valeurs au moyen d'expressions mathématiques:

```
PARAMETER ItemName(set1dep,set2dep) optional text;
  ItemName(set1dep,set2dep) = some expression;
```

L'indice `set2dep` est optionnel.

L'exemple 63 peut ainsi se reformuler comme

```
SETS
```

```
  i          Variables / X1, X2, X3 /;
```

```
PARAMETERS
```

```
  c(i)      Costs / X1 109
              X2 90
              X3 115 /
```

```
  a(i)      Coeff / X1 6
              X2 4
              X3 8 /;
```

```
VARIABLES
```

```
  Z          Variable Z;
```

```
POSITIVE VARIABLES
```

```
  x(i)      Variables;
```

```
EQUATIONS
```

```
  Equation1 Equation 1
  Equation2 Equation 2
  Equation3 Equation 3;
```

```
Equation1..
```

```
  Z =E= sum(i, c(i)*x(i));
```

```
Equation2..
```

```
  sum(i, x(i)) =L= 100;
```

```
Equation3..
```

```
  sum(i, a(i)*x(i)) =L= 500;
```

```
MODEL Example1 /ALL/;
```

```
SOLVE Example1 USING LP MAXIMIZING Z;
```

### 8.5.3 Autres logiciels

Les solutions logiciels retenues sont loin d'être les seules envisageables, et les choix sont volontairement orientés afin de répondre aux objectifs d'un cours d'introduction, mais ne représentent pas forcément un choix optimal. Il existe d'autres langages de modélisation intéressants (on pensera par exemple à AMPL), d'autres solveurs commerciaux ou gratuits. Nous nous désintéresserons cependant des solveurs intégrés dans les tableurs, les algorithmes proposés par défaut dans ceux-ci étant en général de faible qualité, en particulier en optimisation non-linéaire, et limités dans le nombre de variables qui peuvent être traités. Il est toutefois bon de noter que des outils existent pour importer/exporter des données entre un tableur et des outils tels que GAMS.

## 8.6 Notes

La section sur GAMS s'inspire partiellement du cours *Applied Mathematical Programming* donné par Bruce A. McCarl à l'Université Texas A&M.



# Bibliographie

- [1] Dimitri P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*, volume I. Athena Scientific, Belmont, MA, USA, 3rd édition, 2005.
- [2] Frederick S. Hillier et Gerald J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, New York, USA, seventh édition, 2001.
- [3] Maurice Kirby. Patrick maynard stuart blackett. *International Transactions in Operational Research*, 10(4):405–407, 2003.
- [4] Jeffrey C. Lagarias, James A. Reeds, Margaret H. Wright et Paul E. Wright. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):112–147, 1998.
- [5] Adam B. Levy. *The Basics of Practical Optimization*. SIAM, Philadelphia, USA, 2009.
- [6] Ken I. M. McKinnon. Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a nonstationary point. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):148–158, 1998.
- [7] John A. Nelder et Roger Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:308–313, 1965.
- [8] Jorge Nocedal et Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, New York, NY, USA, 1999.